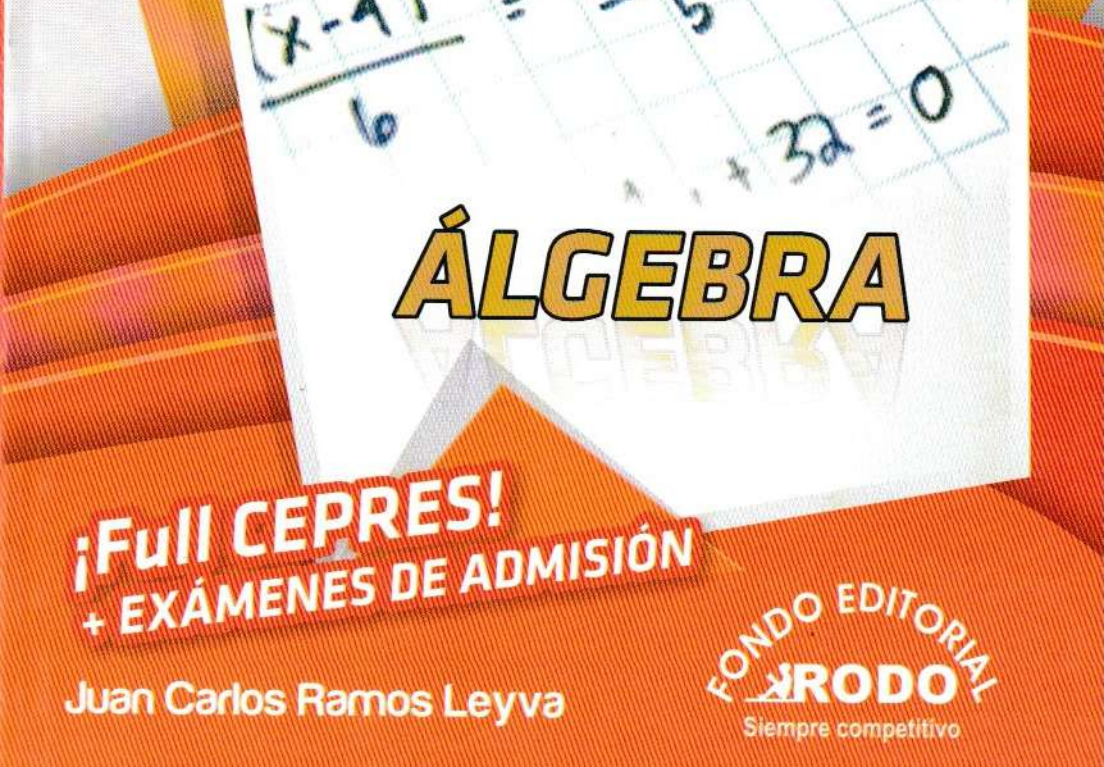




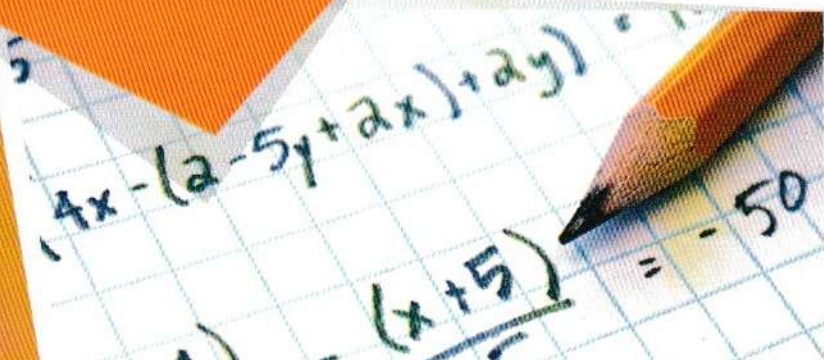
ÁLGEBRA

**¡Full CEPRES!
+ EXÁMENES DE ADMISIÓN**

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO
Siempre competitivo

Desigualdades e Inecuaciones



A photograph of a pencil writing on a piece of graph paper. The paper is placed on a surface with orange geometric shapes. The equations written on the paper are:

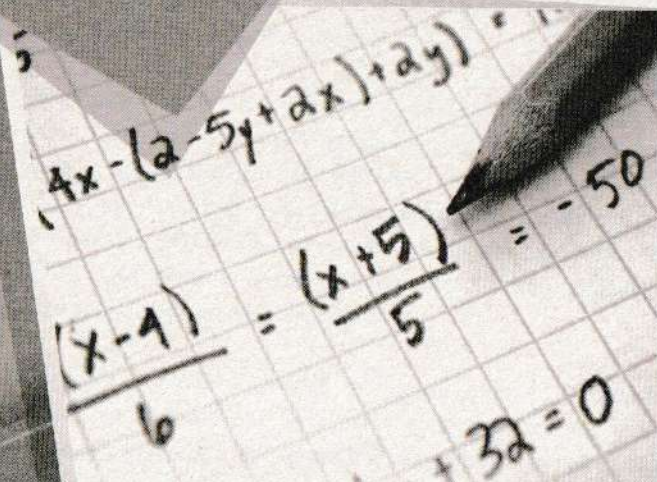
$$4x - (2 - 5y + 2x) + 2y = 1$$
$$(x + 5) = -50$$



Teoría y Práctica

9

Desigualdades e Inecuaciones


$$4x - (2 - 5y + 2x) + 2y = 1$$
$$\frac{(x-4)}{6} = \frac{(x+5)}{5} = -50$$
$$x + 3z = 0$$

ÁLGEBRA

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
AROD
Siempre competitivo

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benítez Nuñez.

DESIGUALDADES - INECUACIONES



ÁLGEBRA - TEMA SELECTO 09, 2da Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Junio 2016 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 📠 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2016 - 08130

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

DESIGUALDADES**DEFINICIÓN**

Se denomina desigualdad a la comparación que se establece entre dos números reales mediante los signos de relación $>$; $<$; $\geq$ ó $\leq$, llamando a los dos primeros simples y a los otros dobles.

Siendo a y b números reales:

$a > b$	a mayor que b	} Desigualdades estrictas.
$a < b$	a menor que b	
$a \geq b$	a mayor o igual que b	} Desigualdades no estrictas.
$a \leq b$	a menor o igual que b	

AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD**1) LEY DE TRICOTOMÍA:**

$$\forall a \wedge b \in \mathbb{R} : a > b \vee a < b \vee a = b$$

2) LEY DE TRANSITIVIDAD:

$$\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R} : \text{si } a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$$

3) LEY ADITIVA:

$$\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R} : \text{si } a > b \rightarrow a + c > b + c$$

4) LEY MULTIPLICATIVA:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^+ : \text{si } a > b \rightarrow ac > bc$$

EQUIVALENCIAS USUALES

Siendo a , b y c números reales:

$$1) \quad a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$$

$$2) \quad a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$$

TEOREMAS DE LA DESIGUALDAD

1) $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^+ :$

$$a > b \rightarrow ac < bc$$

3) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0 ; a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0$

4) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R} :$

$$a > b$$

$$c > d$$

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

5) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R} :$

$$a > b$$

$$c < d$$

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

6) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R}^+ :$

$$a > b$$

$$c > d$$

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

7) $a, b \wedge c \in \mathbb{R}^+ \text{ ó } a, b \wedge c \in \mathbb{R}^- :$

$$a < b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

También

$$a \leq b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

8) $\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ :$

$$a < b < c \rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} < c^{2n+1}$$

9) $\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+ :$

$$a < b < c \rightarrow a^{2n} < b^{2n} < c^{2n}$$

10) $\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R}^-, n \in \mathbb{Z}^+ :$

$$a < b < c \rightarrow c^{2n} < b^{2n} < a^{2n}$$

TEOREMA ADICIONAL (DESIGUALDAD DE CAUCHY - SCHWARZ)

Sean: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ números reales

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

COROLARIO (LEMA DE TITU)

Si: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDAD

1) $a < 0 \wedge c > 0 :$

$$a < b < c \rightarrow 0 \leq b^2 \leq \max\{a^2, c^2\}$$

 $\max\{a^2, c^2\}$ indica el mayor elementodel conjunto $\{a^2, c^2\}$

2) $a, m, n > 0 : \frac{a}{m} + \frac{n}{a} \geq 2\sqrt{\frac{n}{m}}$

3) $a > 0 : a + \frac{1}{a} \geq 2$

4) $a < 0 : a + \frac{1}{a} \leq -2$

PROPIEDAD ADICIONAL

Para números reales positivos tenemos:

MP = Media potencial

MA = Media aritmética

MG = Media geométrica

MH = Media armónica

$$MP \geq MA \geq MG \geq MH$$

Para dos números $a, b; k \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k + b^k}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Para tres números $a, b, c; k \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k + b^k + c^k}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

CLASES DE DESIGUALDAD**I. DESIGUALDAD ABSOLUTA**

Es aquella desigualdad que mantiene el sentido de su signo de relación para todo valor asignado a su letra variable.

Por ejemplo:

$$x^2 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

II. DESIGUALDAD RELATIVA

Es aquella desigualdad que mantiene el sentido de su signo de relación sólo para valores particulares de su letra variable.

Por ejemplo:

$$\text{si: } x - 1 > 5 - x \Rightarrow x > 3$$

INTERVALOS**DEFINICIÓN**

Se denomina intervalo al conjunto cuyos elementos son números reales, dichos elementos se encuentran contenidos entre dos números fijos denominados extremos, a veces los extremos forman parte del intervalo.

INTERVALOS ACOTADOS

Son todos aquellos intervalos cuyos extremos son números reales, estos podrán ser:

I. INTERVALO ABIERTO:

No considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación simple.

En la recta real se tendrá:



Donde: $a < x < b \Leftrightarrow x \in (a; b)$

También: $x \in]a; b[$

II. INTERVALO CERRADO:

Si considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación doble.

En la recta real se tendrá:



Donde: $a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a; b]$

III. INTERVALO MIXTO:

(Semiabierto o semicerrado), considera solo a uno de sus extremos.

Para:



$a < x \leq b \Leftrightarrow x \in (a; b]$

Para:



$a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a; b)$

INTERVALOS NO ACOTADOS

Son todos aquellos intervalos donde al menos uno de los extremos no es un número real.

I. INTERVALO ACOTADO INFERIORMENTE:

Donde:

$$a < x < \infty \Leftrightarrow x > a$$

$$x \in (a; \infty)$$



Donde:

$$a \leq x < \infty \Leftrightarrow x \geq a$$

$$x \in [a; \infty)$$

II. INTERVALO ACOTADO SUPERIORMENTE:

Donde:

$$-\infty < x < a \Leftrightarrow x < a$$

$$x \in (-\infty; a)$$



Donde:

$$-\infty < x \leq a \Leftrightarrow x \leq a$$

$$x \in (-\infty; a]$$

**OBSERVACIÓN**

- 1) Un conjunto se dice que es acotado si y solo si es acotado superiormente e inferiormente a la vez.
- 2) Para el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se tiene:

$$\mathbb{R} =]-\infty; \infty[= \langle -\infty; \infty \rangle$$

Es evidente que $-\infty$ y ∞ no son números reales.

- 3) Como los intervalos son conjuntos con ellos se podrán efectuar todas las operaciones existentes para conjuntos, tales como la unión, intersección, diferencia simétrica, etc, ...

INECUACIONES EN UNA VARIABLE**DEFINICIÓN**

Se denomina inecuación a cualquier desigualdad relativa. Todos los valores de la variable que verifican la inecuación forman el conjunto solución, el cual se representa en función de intervalos.

INECUACIONES RACIONALES**I. INECUACIÓN DE PRIMER GRADO (LINEAL):**

Forma General: $ax + b \gtrless 0$

Donde: $a \wedge b \in \mathbb{R} / a \neq 0$

II. INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (CUADRÁTICA):

Forma General: $ax^2 + bx + c \gtrless 0$

Donde: $a, b \wedge c \in \mathbb{R} / a \neq 0$

Propiedades:

II.1) Si: $a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

II.2) Si: $a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c < 0; \forall x \in \mathbb{R}$

III. INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR:

Forma General: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \gtrless 0$

Donde: $a_0; a_1; a_2; \dots \wedge a_n \in \mathbb{R} / a_0 \neq 0$

$n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

IV. INECUACIÓN FRACCIONARIA:

Forma General: $\frac{F(x)}{H(x)} \gtrless 0; [H]^\circ \geq 1$

Donde: $F(x)$ es un polinomio distinto de cero.

RESOLUCIÓN DE INECUACIÓN

Se recomienda utilizar el método de los puntos de corte cuya aplicación consiste en los siguientes pasos:

- 1) Se trasladan todos los términos al primer miembro obteniendo siempre una expresión de coeficiente principal positivo.
- 2) Se factoriza totalmente a la expresión obtenida, en caso de ser fracción se factoriza cada uno de sus términos.
- 3) Se calculan los puntos de corte, son los valores reales de "x" obtenidos al igualar cada factor primo a cero.
- 4) Se ubican ordenadamente todos los puntos en la recta real, dichos puntos originan en la recta dos o más zonas.
- 5) Se marcan las zonas obtenidas a partir de la derecha alternando los signos (+) y (-)
- 6) Si el signo de relación es $>$ ó $\geq$, el conjunto solución estará conformado por todas las zonas positivas, pero si el signo de relación es $<$ ó $\leq$, el conjunto solución lo conformarán todas las zonas negativas.

Ejemplo: Resolver la inecuación: $x^2 + x > 6$

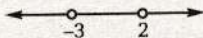
Resolución: De acuerdo con el método de los puntos de corte procedemos así:

$$x^2 + x - 6 > 0$$

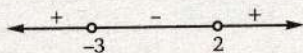
Factorizando: $(x + 3)(x - 2) > 0$

Hallando puntos: $x = -3$; $x = 2$

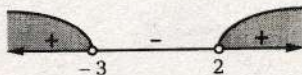
En la recta:



Marcando zonas:



Como el signo de relación es $>$ la solución viene dada por todas las zonas positivas.



$$\therefore x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$$

Ejemplo: Resolver: $\frac{9x+10}{x+2} < 2$

Resolución: Procedemos de un modo similar que en el ejemplo anterior.

$$\frac{9x+10}{x+2} - 2 < 0$$

$$\frac{7x+6}{x+2} < 0$$

Puntos: $7x+6=0 \rightarrow x = \frac{-6}{7}$

$$x+2=0 \rightarrow x = -2$$



$$\therefore x \in \langle -2; -6/7 \rangle$$



OBSERVACIÓN

En una inecuación fraccionaria si el signo de relación es $\geq$ ó $\leq$ solo cerraremos los extremos que provienen del numerador.

Ejemplo: Resolver: $\frac{x^2-5}{x^2-x-12} \geq 1$

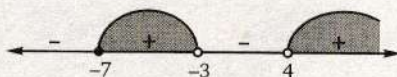
Resolución: $\frac{x^2-5}{x^2-x-12} - 1 \geq 0$

$$\frac{x+7}{x^2-x-12} \geq 0$$

Observar que: $x^2-x-12 \equiv (x-4)(x+3)$

$$\frac{x+7}{(x-4)(x+3)} \geq 0$$

Puntos: $\{-7; 4 \wedge -3\}$



$$\therefore x \in [-7; -3] \cup \langle 4; \infty \rangle$$

DESIGUALDADES E INECUACIONES

INECUACIONES IRRACIONALES

I. Forma: $\sqrt[n]{A} > B$; $n \in \mathbb{Z}^+$

Se resuelve:

$$S_1 = (A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A > B^{2n})$$

$$S_2 = (A \geq 0 \wedge B < 0)$$

$$\therefore C.S = S_1 \cup S_2$$

II. Forma: $\sqrt[n]{A} < B$; $n \in \mathbb{Z}^+$

$$C.S = A \geq 0 \wedge B > 0 \wedge A < B^{2n}$$

III. Forma: $\sqrt[n]{A} \geq \sqrt[n]{B}$; $m \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$C.S = A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A^n \geq B^m$$

Ejemplo: Resolver

$$\sqrt{x+1} > x-1$$

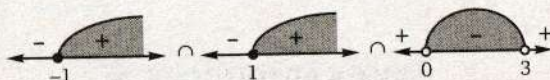
Resolución: De acuerdo con la forma (I) se plantea.

$$S_1: x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x+1 > (x-1)^2$$

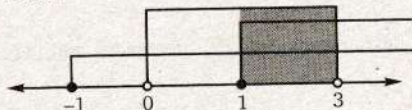
$$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge -x^2 + 3x > 0$$

$$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x^2 - 3x < 0$$

$$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x(x-3) < 0$$



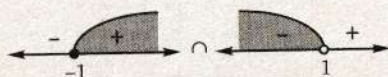
Intersectando:



Observar que:

$$S_1 = [1; 3)$$

$$S_2: x+1 \geq 0 \wedge x-1 < 0$$



Intersectando:

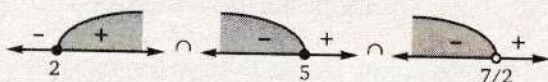
Observar que: $S_2 = [-1; 1]$ Finalmente: $C.S = S_1 \cup S_2$

$$\therefore C.S = [-1; 3]$$

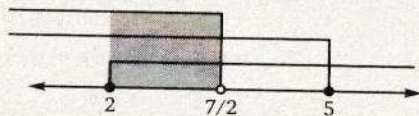
Ejemplo: Resolver $\sqrt{x-2} < \sqrt{5-x}$ **Resolución:** De acuerdo con la forma (III) se plantea:

$$x-2 \geq 0 \wedge 5-x \geq 0 \wedge x-2 < 5-x$$

$$x-2 \geq 0 \wedge x-5 \leq 0 \wedge 2x-7 < 0$$



Intersectando:



$$\therefore C.S = \left[2; \frac{7}{2} \right)$$

VALOR ABSOLUTO (V. A)**DEFINICIÓN**

El valor absoluto del número real x , denotado por $|x|$ se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

Según la definición:

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \leftrightarrow 5 > 0 \\ |-7| &= -(-7) \leftrightarrow -7 < 0 \\ |-7| &= 7 \end{aligned}$$

TEOREMAS

- 1) $|x| \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
- 2) $|x| = |-x|; \forall x \in \mathbb{R}$
- 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \forall x \wedge y \in \mathbb{R}$
- 4) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}; x \wedge y \in \mathbb{R} / y \neq 0$
- 5) $|x^2| = |x|^2 = x^2; \forall x \in \mathbb{R}$
- 6) $-|x| \leq x \leq |x|; \forall x \in \mathbb{R}$
- 7) $|x + y| \leq |x| + |y|; \forall x \wedge y \in \mathbb{R}$
- 8) $||x| - |y|| \leq |x - y|; \forall x \wedge y \in \mathbb{R}$

PROPIEDADES

- 1) Si: $|x + y| = |x| + |y|$
Entonces: $xy \geq 0$
- 2) Si: $|x - y| = |x| + |y|$
Entonces: $xy \leq 0$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Forma General:

$$|x| = b; b > 0 \Leftrightarrow x = b \vee x = -b$$

Ejemplo: Resolver $|2x - 1| = 7$

Resolución: Observar que $b = 7 > 0$ luego tenemos.

$$2x - 1 = 7 \quad \vee \quad 2x - 1 = -7$$

$$2x = 8 \quad \vee \quad 2x = -6$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -3$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{4; -3\}$$

Ejemplo: Resolver $|5x - 1| = 2 - x$

Resolución: Se plantea lo siguiente

$$2 - x > 0 \wedge (5x - 1 = 2 - x \vee 5x - 1 = x - 2)$$

$$x - 2 < 0 \wedge (6x = 3 \vee 4x = -1)$$

$$x < 2 \wedge \left(x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{4} \right)$$

Observando que: $x = \frac{1}{2}$ verifica $x < 2$

$x = -\frac{1}{4}$ verifica $x < 2$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right\}$$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1) $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$

2) $|x| < b \Leftrightarrow b > 0 \wedge (-b < x < b)$

3) $|x| \geq |y| \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \geq 0$

Ejemplo: Resolver $|3x+4| < 5$

Resolución: De acuerdo con el teorema (2) se plantea:

$$\underbrace{5 > 0} \wedge (-5 < 3x+4 < 5)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ por que es una verdad}$$

Luego sólo se resuelve:

$$\begin{aligned} -5 &< 3x+4 < 5 \\ -5-4 &< 3x < 5-4 \\ -9 &< 3x < 1 \\ -3 &< x < \frac{1}{3} \\ \therefore x &\in \left(-3; \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver $x^2 \geq 3|x|+4$

Resolución: Se sabe que $x^2 = |x|^2$, luego se tendrá:

$$\begin{aligned} |x|^2 &\geq 3|x|+4 \\ |x|^2 - 3|x| - 4 &\geq 0 \\ (|x| - 4)(|x| + 1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Observar que: $|x| + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

En consecuencia $\begin{aligned} |x| - 4 &\geq 0 \\ |x| &\geq 4 \end{aligned}$

Por teorema (1): $x \geq 4 \vee x \leq -4$

$$\therefore x \in \langle -\infty; -4 \rangle \cup [4; \infty)$$

MÁXIMO ENTERO**DEFINICIÓN**

El máximo entero de un número real x denotado por $\llbracket x \rrbracket$, se define como el mayor entero no mayor que x .

$$\llbracket x \rrbracket = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

Según la definición:

$\lceil 5,2 \rceil = 5$ ¿Por qué? Porque 5 es el mayor entero que no es mayor que 5,2.

$\lceil 12 \rceil = 12$ ¿Por qué? Porque 12 es el mayor entero que no es mayor que 12.

$\lfloor -2,7 \rfloor = -3$, observa que: $-3 \leq -2,7$

TEOREMAS

1) $\forall x \in \mathbb{R} : \lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : \lceil x \rceil \leq x \leq \lceil x \rceil + 1$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : \lceil \lceil x \rceil \rceil = \lceil x \rceil$

4) Si $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$:

$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$

5) Si $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$:

$\lceil x \rceil \leq n \Leftrightarrow x < n+1$

$\lceil x \rceil < n \Leftrightarrow x < n$

$\lceil x \rceil \geq n \Leftrightarrow x \geq n$

$\lceil x \rceil > n \Leftrightarrow x \geq n+1$

PROPIEDADES

1) $\forall x \in \mathbb{Z} : \lceil x \rceil = x$

2) Si $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} : \lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Ejemplo: Resolver $\lceil 3x - 1 \rceil = 6$

Resolución: De acuerdo con el cuarto teorema, la igualdad propuesta se puede reescribir así:

$$6 \leq 3x - 1 \leq 7$$

$$7 \leq 3x \leq 8$$

$$\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$$

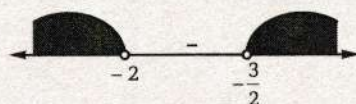
$$\therefore CS = \left[\frac{7}{3}; \frac{8}{3} \right]$$

Ejemplo: Resolver: $\left\lceil \frac{1}{x+2} \right\rceil \leq 1$

Resolución: Por teorema se plantea:

$$\frac{1}{x+2} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - 2 < 0$$

$$\frac{-2x-3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+2} > 0$$



$$\therefore CS = (-\infty; -2) \cup \left[-\frac{3}{2}; \infty \right)$$



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si $x \in (-2; 1)$. Determine el intervalo de $x^2 + 1$

A) $(1; 2)$ B) $(1; 5)$ C) $[1; 5)$
D) $[1; 2)$ E) $[1; 5]$

2. Si $x \in (1; 4)$. Determine el intervalo de:

$$\frac{2}{x+1}$$

A) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ B) $(1; 2)$ C) $\left(1; \frac{5}{2}\right)$
D) $\left(\frac{2}{5}; 2\right)$ E) $\left(\frac{2}{5}; 1\right)$

3. Si $x \in [-3; 4)$. Determine el intervalo de: $y = x^2 - 2x + 3$

A) $[0; 18]$ B) $[2; 18]$ C) $[-1; 17]$
D) $(2; 18]$ E) $(3; 18)$

4. Si $x \in (-4; 1)$. Determine el intervalo de: $y = \frac{x+2}{x-2}$

A) $\left(-3; \frac{1}{3}\right)$ B) $(-1; 1)$ C) $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$
D) $(-3; 1)$ E) $(-4; 0)$

5. Resolver:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x-3}{4} + \frac{x-5}{8} \geq 1$$

A) $\left(\frac{23}{7}; \infty\right)$ B) $\left[\frac{17}{7}; \infty\right)$ C) $\left[\frac{19}{7}; \infty\right)$
D) $\left[\frac{23}{7}; \infty\right)$ E) $\left(\frac{17}{7}; \infty\right)$

6. Resolver: $x^2 > x + 1$

A) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
B) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$
C) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
D) $(-\infty; \frac{2-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{2+\sqrt{5}}{2}; \infty)$
E) $(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty)$

7. Si $[m; n]$ es el conjunto solución de la inequación: $x^2 - 5x + 1 \leq 0$.

$$\text{Calcular: } m^2 + n^2$$

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

8. Resolver: $x^3 + x^2 \leq 9x + 9$

A) $[-3; -1] \cup [3; \infty)$
B) $[3; \infty)$
C) $(-\infty; 3] \cup [-1; 3]$
D) $[-3; 3]$
E) $(-\infty; -3] \cup [-1; \infty)$

9. Resolver: $x^4 > x^2 + 2$

e indicar el complemento de su conjunto solución:

A) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ B) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
C) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
D) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ E) $[-1; 1]$

10. Resolver:

$$(x-1)^7(x+1)^4(x+2)^3x < 0$$

- A) $(-2; -1) \cup (0; 1)$
 B) $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$
 C) $(-1; 0) \cup (1; \infty)$
 D) $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
 E) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

11. Resolver:

$$(x-3)^{10}(x+5)^{13}x^4 \geq 0$$

- A) $[-5; 0] \cup [3; \infty)$
 B) $[0; 3] \cup [5; \infty)$
 C) $[-5; \infty)$
 D) $[3; \infty)$
 E) $[0; \infty)$

12. Resolver:

$$\frac{5x}{x-2} > \frac{6x+1}{x-2}$$

- A) $(-1; \infty)$
 B) $(1; \infty)$
 C) $(-2; 1)$
 D) $(-1; 2)$
 E) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

13. Resolver: $\frac{5}{x-1} \geq \frac{2}{x+1}$

- A) $\left[-\frac{7}{3}; \infty\right)$
 B) $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup (-1; 1)$
 C) $(-1; \infty)$
 D) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
 E) $\left[-\frac{7}{3}; -1\right) \cup (1; \infty)$

14. Resolver:

$$\frac{x+5}{x+3} \leq \frac{x-1}{x+1}$$

- A) $(-2; -1) \cup (3; \infty)$
 B) $(-\infty; -2] \cup (1; 3)$
 C) $(-\infty; 3)$
 D) $(-\infty; -3) \cup [-2; 1)$
 E) $(-1; 1) \cup (3; \infty)$

15. Resolver:

$$\frac{(x-1)^7(x+4)x^4}{(x-2)^2(x+1)} < 0$$

- A) $(-\infty; -4) \cup (-1; 1)$
 B) $(-4; -1) \cup (1; 6)$
 C) $(-\infty; -4) \cup (-1; 1) - \{0\}$
 D) $(-4; -1) \cup (0; 1)$
 E) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2) - \{0\}$

16. Resolver:

$$\frac{(x-4)^6(2x-1)^{13}(x+1)^{15}}{(x-1)^4(x+2)^3} \geq 0$$

- A) $(-2; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right) - \{1\}$
 B) $(-2; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$
 C) $(-2; -1] \cup (1; \infty)$
 D) $(-\infty; -2) \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right)$
 E) $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup [4; \infty)$

17. Resolver: $|2x-1| = 4$

- A) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$ C) $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$
 D) $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ E) $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

18. Resolver:

$$|5x + 1| = x$$

- A) $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ B) $\left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right\}$
 C) $\left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right\}$
 D) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$ E) $\emptyset$

19. Resolver:

$$|3x + 2| > x - 1$$

- A) $\langle -\infty; \infty \rangle$
 B) $\left\langle -\frac{3}{2}; -\frac{1}{4} \right\rangle$
 C) $\left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right\rangle$
 D) $\left\langle -\frac{1}{4}; \infty \right\rangle$
 E) $\left\langle -\infty; -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{4}; \infty \right\rangle$

20. Resolver: $|5x + 3| \leq |2x + 1|$

- A) $\left\langle -\frac{2}{3}; -\frac{4}{7} \right\rangle$ B) $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{2}{7} \right]$
 C) $\langle -1; 4 \rangle$
 D) $[-2; 7]$ E) $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{4}{7} \right]$

21. Dado el conjunto:

$$A = \left\{ x \mid \frac{1}{4} < \frac{2x-1}{x+3} < \frac{3}{5} \right\}$$

Calcular: $\text{Inf}(A) + \text{Sup}(A)$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$
 D) 3 E) 4

22. Determine el ínfimo del conjunto:

$$A = \left\{ x + x^2 + \frac{1}{3} \mid x > 0 \right\}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 0

23. Resolver:

$$(x + 1)^2 \leq 4(x + 1)$$

- A) $\langle -3; 0 \rangle$ B) $[-1; 3]$ C) $[-3; -1]$
 D) $\langle -\infty; -3 \rangle$ E) $[1; 3]$

24. Luego de resolver: $P^2(x) - 5P(x) + 6 \leq 0$; indicar el número de valores enteros que asume "x" cuando $P(x) \equiv x^2 - 1$.

- A) 3 B) 2 C) 1
 D) 4 E) 5

25. ¿Para que valores de "K" la inecuación:

$$x^2 + Kx - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

se verifica para todo valor real de x?

- A) $K \in (-6; 2)$ B) $K \in \langle -10; 7 \rangle$
 C) $K \in (1; 3)$
 D) $K \in \langle -15; -10 \rangle$ E) $K \in \langle 3; 6 \rangle$

26. El conjunto solución de la inecuación:

$$(x-1)^3 (x^2 + 3x + 4) (x_3 - 1) > 0 \text{ es:}$$

$$\langle -\infty; a \rangle \cup \langle b; \infty \rangle. \text{ Calcular: } a^2 + b^2$$

- A) -3 B) -2 C) 2
 D) 3 E) 4

27. Resolver:

$$(x^2+x+1)(x^4+x^2+1)(x+2)^3(x^2-1) > 0$$

- A) $\langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$
 B) $\langle 1; 2 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
 C) $[-2; -1] \cup \langle 1; \infty \rangle$
 D) $\langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$
 E) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle -1; 1 \rangle$

28. Resolver:

$$\frac{(x-2)^4(x-1)^5(x+1)^2}{(x^2+4)(x-3)^7} \leq 0$$

- A) $[-1; 1]$ B) $[1; 3]$
 C) $[1; 3] \cup \{-1\}$
 D) $[-1; 2]$ E) $[-1; 2] \cup \{3\}$

29. Determinar el menor número racional "m" de modo que para cualquier $x \in [2; 4]$ satisface la desigualdad:

$$\frac{x+3}{x-5} \leq m$$

- A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{5}{3}$
 D) -7 E) -6

30. Resolver:

$$1 < \frac{3x+10}{x+7} < 2$$

- A) $\left\langle -\frac{1}{2}; 7 \right\rangle$ B) $\langle -1; 5 \rangle$ C) $\left\langle -\frac{3}{2}; 4 \right\rangle$
 D) $\langle 0; 4 \rangle$ E) $\langle 1; 5 \rangle$

31. Resolver:

$$\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$$

- A) $[3; \infty)$ B) $[2; \infty)$
 C) $[9; \infty)$
 D) $[3; 9]$ E) $[3; \infty) \cup \{2\}$

32. Determina la cantidad de valores enteros que asume "x" en la siguiente inecuación:

$$\sqrt{2-\sqrt{9-x}} \geq 1$$

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

33. Determine el supremo del conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{10-x} - \sqrt{4-\sqrt{8-x}} > 0$$

- A) 4 B) 5 C) 6
 D) 7 E) 8

34. Determine la suma de soluciones reales de la ecuación:

$$|x|^3 + |x| - 3 = x^3$$

- A) 3 B) 5 C) -2
 D) -3 E) 2

35. Determine el producto de soluciones de la ecuación:

$$|2x-6| + |15-5x| = 14$$

- A) -5 B) 5 C) 6
 D) -6 E) 25

36. Determine el número de soluciones de la ecuación:

$$||x| - 3| = |3 - 2|x||$$

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

37. Resolver: $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0$

A) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \left[\frac{1}{2}; \infty \right)$

B) $\langle -\infty; -\frac{2}{3} \rangle$

C) $\left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right]$

D) $\left[-2; -\frac{2}{3} \right]$

E) $\mathbb{R} - \left\langle -\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$

38. Resolver: $|x^2 - 2x + 4| + |x + 1| < x^2$

A) $\langle 1; 5 \rangle$ B) $\langle 2; 5 \rangle$

C) $\langle 5; \infty \rangle$

D) $\langle 1; 2 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$ E) $\langle 1; \infty \rangle$

39. Determine el número de soluciones enteras de la inecuación:

$$1 < \sqrt{x^2 + 4} - 4x \leq 3$$

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

40. Calcular: $\left\lfloor \frac{5 - 3\pi}{\pi + 2} \right\rfloor$

A) -1 B) -2 C) 1

D) 0 E) 2

41. Resolver: $\left\lfloor \frac{|x+1|+2}{3} \right\rfloor = 4$

A) $\langle -12; -9 \rangle \cup \langle 11; 14 \rangle$

B) $\langle -12; 0 \rangle \cup [10; 15]$

C) $\langle -11; -9 \rangle \cup [11; 14]$

D) $\langle -12; -9 \rangle \cup [11; 14]$

E) $\langle -10; -8 \rangle \cup [10; 13]$

42. Resolver: $[3x - 5] = 2x + 1$

A) $\{6\}$ B) $\left\{6; \frac{13}{2}\right\}$ C) $\left\{5; \frac{11}{2}\right\}$

D) $\left[6; \frac{13}{2}\right]$ E) $\left\langle 6; \frac{13}{2} \right\rangle$

43. Resolver: $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - x = 2$

A) $\{-2; -3\}$ B) $\{-1; -3\}$

C) $\{-4; -3\}$

D) $\{-5; -4\}$ E) $\{-4\}$

44. Determine el ínfimo y el supremo del siguiente conjunto:

$$A = \left\{ \left\lfloor \frac{1}{x-4} \right\rfloor \mid |x| < 3 \right\}$$

Indicar como respuesta su suma:

A) $\frac{8}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{9}{7}$

D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{11}{7}$

45. Determine el producto entre el ínfimo y el supremo del siguiente conjunto:

$$A = \left\{ \left\lfloor \frac{x+4}{x+3} \right\rfloor \mid -2 \leq x \leq 2 \right\}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

46. Resolver: $\frac{x^2}{[(x+1)-\sqrt{x+1}]^2} < \frac{x^2 + 3x + 18}{(x+1)^2}$

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle -1; \infty \rangle$

C) $\emptyset$

D) $\langle -1; 3 \rangle - \{0\}$ E) $\langle 0; \infty \rangle$

47. Si $a < b < 0$; determine el conjunto al cual pertenece x de tal modo que:

$$\frac{x+b}{x+a} - \frac{x-b}{x-a} \leq \frac{2(b^2-ab)}{x^2-a^2}$$

- A) $(-\infty; a) \cup [b; -a)$
 B) $(-a; a) \cup (0; 2b)$
 C) $(a; -a) \cup (b; 2b)$
 D) $(a; -a) \cup [2b; \infty)$
 E) $(-\infty; -b] \cup (a; -a) \cup [2b; \infty)$

48. Resolver:

$$||x+4| - 9| + x^2 \leq x(x+1) + 1$$

- A) $[2; \infty)$ B) $(-\infty; 2]$ C) $(0; 2]$
 D) $(1; \infty)$ E) $(2; \infty)$

49. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto solución de la ecuación:

$$|x-1| + |x-2| = x+7?$$

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

50. Identifica un intervalo solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|2x+3| - |x-8|}{|2x-1| - |7x-8|} \geq 0$$

- A) $\left[-11; -\frac{9}{5}\right)$ B) $(0; 2)$
 C) $(-11; 0)$
 D) $\left[\frac{7}{5}; \frac{5}{3}\right]$ E) $\left\langle \frac{5}{3}; \infty \right\rangle$

51. Si $A = \{x \in \mathbb{R} / 2x-3 > 1 \rightarrow x > 2\}$ determine A^c .

- A) $\emptyset$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}^+$
 D) $\mathbb{R}^-$ E) $\{0\}$

52. Dado el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / \sim[(3x+1 < 7) \vee (2x-1 > 13)]\}$$

Determine $n(A)$.

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

53. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} > x^4$

II. $\exists x \in \mathbb{R} / |x| > 2^x$

III. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 > 0$

- A) VVV B) VVF C) VVF
 D) VFF E) FFF

54. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7\}$ indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

p: $\exists x \in A / \forall y \in B; x+y > 3$

q: $\forall x \in A, \forall y \in B; x^2 + y^2 \geq 5$

r: $\forall x \in A, \exists y \in B / xy$ es par.

- A) FVV B) VVV C) FVF
 D) FFF E) FVV

55. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p: $\forall x \in \{4; 6\} : \exists y \in \{1; 3\} / x+y \leq xy$

q: $\exists x \in \{-2; -3\} / \forall y \in \{-1; -2\} : x-y < x^2$

r: $\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \{1; 2\} : x+y < x^2 - 1$

- A) VVV B) VVF C) FVF
 D) VFF E) FVV

56. Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} / x + 1 > y > x$

II. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R} / y^2 > x > (y-1)^2$

III. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} / (x \leq (y-1)^2) \vee (y^2 \leq x)$

IV. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N} / (y \geq x) \vee (y+1 \leq x)$

- A) VVFF B) FFFF C) VVVV
D) VVFF E) VFVF

57. Si a y b son números reales tal que cumplen $a < 0 < b$, indique la verdad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes proposiciones:

I. $\frac{a-b}{ab^2} > 0$

II. $\frac{a^2+b}{b-a+1} > 0$

III. $a^3 - b^3 < 3ab(a-b)$

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) VVF

58. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si $x > 0 \wedge |y| < 1$ entonces $xy + x + 1 > 1$

II. Si $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^+$ entonces el máximo valor de: $\frac{5xy}{x^2 + y^2 + 3xy}$ es 1.

III. Si $x^2 - x^4 + 3 < M, \forall x \in \mathbb{R}$ entonces el menor valor de M entero es 3

- A) VVV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFF

59. Si $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen $x^2 + y^2 = 1$ entonces de $T = \frac{1}{2}(x+y)$ se afirman:

I. $T \in [0; \sqrt{2}]$

II. $T \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; \sqrt{2}\right]$

III. $T \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas?

- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo I y II E) Sólo II y III

60. Si $x \in [a; b], a < b$, entonces para algún $t \in [0; 1]$, x se puede expresar como:

A) $tb + (t-1)a$ B) $ta + (t+1)b$

C) $ta + (t-1)b$

D) $(b-a)t$ E) $tb + (1-t)a$

61. Resolver la inecuación, en x :

$$\frac{ax-1}{b} + \frac{bx-1}{a} > \frac{(a+b)x-3}{a+b}, a < b < 0.$$

A) $\left(\frac{1}{a}; \infty\right)$

B) $\left(\frac{1}{a+b}; \infty\right)$

C) $\left(\frac{1}{b}; \infty\right)$

D) $(-a; \infty)$

E) $(-b; \infty)$

62. Determina el cardinal del conjunto:

$$A = \left\{x + \frac{2}{x} \in \mathbb{Z} / x \leq 2 \rightarrow x > 10\right\} \cap [1; 6]$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

63. Si $A = \{x \in \mathbb{R} / a(x+2b) \leq 2a(a+b)\}$

$B = \{y \in \mathbb{R} / by - b^2 < ay - a^2\}$, encontrar

$A \cap B$ si $b < 0 < a$

A) $\emptyset$ B) $[a-b; a)$

C) $(b; a)$

D) $(a+b; 2a)$ E) $(b; a+b]$

64. Determinar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

I. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : \left| x + \frac{1}{x} \right| \leq 2$

II. $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

III. $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x+y|$

A) VVV B) VFF C) FVV

D) FFV E) FVF

65. Sea la igualdad:

$|x - a + b| = |x + a - b| \dots (*)$

A) (*) si y solo si $x = 0 \vee a^2 = b^2$

B) (*) si y solo si $x = a = b$

C) (*) si y solo si $x = 0 \vee a = b$

D) (*) si y solo si $x = 0 \wedge a = b$

E) (*) si y solo si $x = a = -b$

66. Si $x \in \mathbb{R}$; de las siguientes afirmaciones:

I. $|x| = \max\{x; -x\}$

II. Siempre para $x \in \mathbb{R}$; $|x| = \sqrt{x^2}$

III. Si $|x| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, entonces $x = 0$.

Indique cuáles son verdaderas.

A) I y II B) I y III C) II y III

D) Sólo I E) Todas

67. Si $\{a; b; x; y; L\} \subset \mathbb{R}$. ¿Diga cuáles de las afirmaciones que siguen son verdaderas?

I. Si $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |x-b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \varepsilon > 0$,

entonces $a = b$.

II. Si $|x-L| < \varepsilon \wedge |y-L| < \varepsilon \wedge x \leq z \leq y$,

donde: $\varepsilon > 0$, entonces $|z-L| < \varepsilon$

III. Si $ab > 0 \wedge |a| \geq |b|$ entonces siempre

se cumple: $|a-b| = |a|-|b|$

A) Todas B) I, II C) Sólo III

D) II, III E) I, III

68. El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / |1-x| = x-1\}$ es igual a:

A) $[1; +\infty)$ B) $[0; 1)$ C) $(-\infty; 0)$

D) $(0; 1)$ E) $[-1; 1)$

69. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \geq \frac{9}{|a| + |b| + |c|}$$

II. Si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(|a| + |b|)^2}$$

III. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2|abcd|$

A) VVV B) VVF C) FVV

D) FVF E) FFF

70. Resolver: $\left| \frac{x+1}{x-2} - x + 2 \right| = x$

Determine la suma de cifras de $x^2 + 1$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

71. Si $a > b > 0$ y S es el conjunto solución de $|x-a| + b = |x+a| - b$.

Se puede afirmar:

- A) $\{1, a\} \subset S$ B) $\{a, b\} \subset S$
 C) $\{b\} \cap S \neq \emptyset$
 D) $\{0, b\} \cap S = \emptyset$ E) $\{a+b\} \subset S$

72. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ entonces $|a+b| \leq |a| + |b|$.

II. $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a+b| = \sqrt{2}$

III. $\min\{2a; 2b\} = a+b-|a-b|$

- A) VFF B) VVV C) VFF
 D) FFV E) FFF

73. Resolver:

$$\frac{|x-1|-|x|}{1-|x|} \geq 0$$

e indique uno de los intervalos de la solución.

- A) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ B) $[-1; 0]$ C) $\left(-1; \frac{1}{2}\right]$
 D) $\langle 1; 2]$ E) $\langle 2; \infty)$

74. Se define:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |2x-3| > 1-x\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / |3x-2| < 2-x\}$$

Hallar el conjunto:

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x \in (A-B) \rightarrow x \in B\}$$

- A) $\left[-2; -\frac{4}{3}\right]$ B) $\left\langle -2; \frac{4}{3} \right\rangle$
 C) $\langle -1; 1 \rangle$
 D) $\langle 0; 1 \rangle$ E) $\left\langle 1; \frac{4}{3} \right\rangle$

75. Resolver:

$$|x-2| \leq \frac{x}{2}$$

y dar el conjunto solución:

- A) $\left[\frac{4}{3}; 4\right]$ B) $[-1; 1]$ C) $\langle -1; 1 \rangle$
 D) $\left\langle \frac{4}{3}; 3 \right\rangle$ E) $\mathbb{R}^+$

76. Hallar el conjunto solución:

$$|ax+b| < |bx+a|$$

donde: $-a < b < a$

- A) $\langle -a; -b \rangle$ B) $\langle a; b \rangle$ C) $\langle -1; 1 \rangle$
 D) $\langle -1; 1 \rangle$ E) $\langle -b; a \rangle$

77. Si S es el conjunto solución de:

$$\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \leq 1$$

Entonces se puede afirmar:

- A) $\pi^2 \notin S$ B) $\left\langle \frac{4}{3}; \infty \right\rangle \subset S$
 C) $S \subset \left\langle -\infty; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right\rangle$
 D) $\left\langle \frac{1}{3}; \infty \right\rangle \subset S$ E) $S \cap \langle 0; 1 \rangle \neq \emptyset$

78. Sea el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x = t^2 + 3t, t \in \langle 0; 1 \rangle\}$$

Si m es el mayor entero y M es el menor entero tal que: $m < x < M, \forall x \in A$.

Calcular $m+M$.

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$
 D) 4 E) $\frac{9}{2}$

79. Determinar valores para m para que una raíz de la ecuación:

$x^2 + 2mx + (m^2 - 1) = 0$ sea mayor que -1 y la otra menor que 2 . Si $[a; b]$ es el menor intervalo cerrado que contiene a todos los valores que asume m , entonces $b - a$ es igual a:

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

80. Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / (x-2)^2[(x-2)^2 - 15] > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 4(x-1) \wedge x^2 \leq 20\}$$

Halle el cardinal del conjunto:

$$(A \cap B) \cap \mathbb{Z}.$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

81. ¿Para qué valores de m , la desigualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$?

$$-6 < \frac{2x^2 - mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4$$

- A) $(-2; 14)$ B) $(-2; 4)$ C) $(-12; 4)$
D) $(0; +\infty)$ E) $(-\infty; 0)$

82. Determine el producto de todos los valores reales de k para que $\left(-\frac{2}{5}; 3\right)$ sea el conjunto solución de la inecuación:

$$(k^2 + 1)x^2 + (1 - 3k^2)x - (k^2 + 3) < 0$$

- A) -36 B) -25 C) -16
D) -9 E) -4

83. La suma de dos números reales positivos es 12. ¿Cuál es el mayor valor que puede asumir el producto de los números?

- A) 18 B) 24 C) 36
D) 48 E) 64

84. Halle el intervalo en que debe variar m para que la ecuación:

$x^4 + (1-m)x^2 + 2(m-3) = 0$ tenga dos raíces reales y dos raíces complejas.

- A) $(-\infty; 6)$ B) $(3; +\infty)$ C) $(-6; +\infty)$
D) $(-\infty; 3)$ E) $(3; 6)$

85. Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. El intervalo $(-2; 1]$ es el conjunto

$$\text{solución de } \frac{x-1}{x+2} \leq 0$$

II. $(-\infty; -2) \cup (-1; 1)$ es el conjunto

$$\text{solución de } \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

III. $(-\infty; 3)$ es el conjunto solución de

$$\frac{x^2+x+1}{x-3} \leq 0$$

- A) VVV B) FVV C) VFF
D) FFV E) VFFV

86. Resolver la inecuación:

$$\frac{ax+1}{bx+1} \geq \frac{x+a}{x+b}$$

Si $a < 0 < b < 1$. Indique su conjunto solución:

- A) $\left(-\frac{1}{b}; 1\right]$ B) $\left(-\frac{1}{b}; -1\right]$
C) $\left(-\frac{1}{b}; -1\right] \cup (-b; 1]$
D) $(-b; 1]$ E) $[-1; 1]$

87. Si: $S = \langle a, b \rangle \cup \langle c, d \rangle \cup \langle e, \infty \rangle$ es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2)(x - 5)}{(x^2 + x - 2)(x + 3)(x - 5)} > 0$$

dar como respuesta el valor de:

$$a + b + c + d + e$$

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

88. Sean S_1, S_2 y S los conjunto solución de

las inecuaciones $x^2 - x - 12 \geq 0$;

$x^2 + x - 1 \leq 0$ e $(x^2 - x - 12)(x^2 + x - 1) \leq 0$
respectivamente se afirma:

I. $S \subset S_1 \cap S_2$

II. $(S_1 \cap S_2) \cup (S_1^C \cap S_2^C) \subset S$

III. $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 12 = 0 \vee x^2 + x - 1 = 0\} \subset S_1 \cap S_2$

- A) VVV B) FVV C) FVF
D) VVF E) FFF

89. La inecuación cuadrática:

$(3m^2 - m)x^2 + (2m - 9)x + 2m^2 - 5 < 0$
tiene como conjunto solución el inter-
valo $\left\langle \frac{3}{7}; \frac{1}{2} \right\rangle$, entonces el valor de:

$$m^2 - 4m + 8 \text{ es:}$$

- A) 4 B) 8 C) 12
D) 20 E) 24

90. Hallar A^C , si:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} / \frac{(a+1)x^2 + ax + a}{x^2 + x + 1} > 3, \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

- A) $\langle 1, 4 \rangle$ B) $\left[\frac{5}{3}; 3 \right]$ C) $\langle 4; 10 \rangle$
D) $[0; +\infty)$ E) $\langle -\infty; 3 \rangle$

91. Si $-3 < \frac{x^2 - (a+5)x + 1}{x^2 + x + 1} < 3, \forall x \in \mathbb{R}$,

halle el intervalo de variación de a .

- A) $\langle -4; 4 \rangle$ B) $\langle 0; 4 \rangle$ C) $\langle -10; -4 \rangle$
D) $\langle 4; 10 \rangle$ E) $\langle -4; 0 \rangle$

92. Determine el conjunto solución de la

inecuación: $\sqrt{2-x} \leq |x|$

- A) $\langle -\infty; 2 \rangle$
B) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup [0; 2]$
C) $\langle -2; 1 \rangle$
D) $\langle -\infty; 2 \rangle$
E) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup [1; 2]$

93. Si r es un elemento del conjunto solu-
ción de la inecuación:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{2} \text{ entonces}$$

- A) $r \in [1; +\infty)$ B) $r \in \langle -\infty; 0 \rangle$
C) $[0; 1] \cap \{r\} \neq \emptyset$
D) $r \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$ E) $r \notin \langle 0; 1 \rangle$

94. Si S es el conjunto solución de la si-
guiente inecuación:

$$\sqrt{x^3 + 3x^2 + 6x - 2} + \sqrt{1-x} < x + 1$$

entonces el conjunto S es:

- A) $\langle 0; 1 \rangle$ B) $\left\langle -\infty; \frac{8}{9} \right\rangle$
C) $\left\langle -\infty; -\frac{8}{9} \right\rangle$
D) $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\rangle$ E) $\langle -\infty; 0 \rangle$

95. Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt[3]{x + 4}}{\sqrt[5]{x^2 - 4x + 3}} < 0$$

Entonces:

- A) $S \subset (-\infty; -4]$
 B) $[2; 3] \cap S \neq \emptyset$
 C) $S \subset (-\infty; 2]$
 D) $S \subset [-4; +\infty)$
 E) $S \cap [6; \infty) \neq \emptyset$

96. Si $\langle a; b \rangle$ es el conjunto solución de la inecuación:

$$(2x-1)^2(x-7)^3(x^2-x+20)(x-5)^{17} < 0$$

- A) 6 B) 8 C) 10
 D) 12 E) 14

97. Determine el conjunto solución de:

$$x^{10} - x^7 + x^4 - x^3 + 1 > 0$$

- A) $\{0; 1\}$ B) $\mathbb{R}^+$ C) $[0; 1]$
 D) $\langle 0; 1 \rangle$ E) $\mathbb{R}$

98. Sea el conjunto solución:

$$S = \langle a; b \rangle \cup \langle c; \infty \rangle \text{ de la inecuación:}$$

$$\frac{(x-2)^2(x-3)^{1/5}}{(x+3)(x+2)} > 0,$$

dar el valor de $a + b + c$.

- A) -2 B) -1 C) 0
 D) 1 E) 2

99. Si $\langle a; b \rangle - \{c\}$ es el conjunto solución de:

$$\frac{\sqrt[6]{4x-8}(x^2-36)^{11}\sqrt[5]{x-4}}{(x-5)^2(2x+5)} < 0$$

Determine el valor de: $T = a + b + c$

- A) 7 B) 10 C) 12
 D) 15 E) 21

100. Hallar A , si:

$$A = \left\{ x \in \langle 2, 6 \rangle - \frac{\sqrt{2-|x|} \cdot (1-x^2)}{(|x+3|+x-1)(|x|-2)} \geq 0 \right\}$$

- A) $\mathbb{R}$ B) $\emptyset$ C) $\left[\frac{7}{2}; 4\right]$
 D) $\langle 2; 3 \rangle$ E) $\langle 4; 6 \rangle$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:** Por condición tenemos:

$$-2 < x < 1$$

$$0 \leq x^2 < 4$$

$$1 \leq x^2 + 1 < 5$$

$$\therefore \text{Intervalo} = [1; 5)$$

Rpta.: C**Resolución 2:** Por condición tenemos:

$$1 < x < 4$$

$$2 < x + 1 < 5$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{x+1} < 1$$

$$\therefore \text{Intervalo} = \left(\frac{2}{5}; 1 \right)$$

Rpta.: E**Resolución 3:** Se pide el intervalo de:

$$y = x^2 - 2x + 3$$

$$y = (x - 1)^2 + 2$$

Por condición tenemos:

$$-3 \leq x < 4$$

$$-4 \leq x - 1 < 3$$

$$0 \leq (x - 1)^2 \leq 16$$

$$2 \leq (x - 1)^2 + 2 \leq 18$$

$$2 \leq y \leq 18$$

$$\therefore \text{Intervalo} = [2; 18]$$

Rpta.: B

DESIGUALDADES E INECUACIONES**Resolución 4:** Se pide el intervalo de:

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

$$y = 1 + \frac{4}{x-2}$$

Por condición tenemos:

$$-4 < x < 1$$

$$-6 < x - 2 < -1$$

$$-1 < \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{6}$$

$$-4 < \frac{4}{x-2} < -\frac{2}{3}$$

$$1 - 4 < 1 + \frac{4}{x-2} < 1 - \frac{2}{3}$$

$$-3 < y < \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{Intervalo} = \left(-3; \frac{1}{3}\right)$$

Rpta.: A**Resolución 5:** La inecuación dada se puede reescribir así:

$$\frac{4(x-1) + 2(x-3) + x - 5}{8} \geq 1$$

$$4x - 4 + 2x - 6 + x - 5 \geq 8$$

$$7x - 15 \geq 8$$

$$7x \geq 23$$

$$x \geq \frac{23}{7}$$

$$\therefore x \in \left[\frac{23}{7}; \infty\right)$$

Rpta.: D

Resolución 6: La inecuación dada es:

$$x^2 - x - 1 > 0$$

Halleemos los puntos de corte:

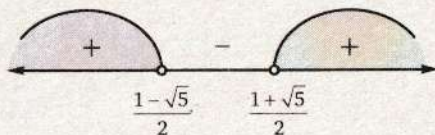
$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Finalmente en la recta real:



$$\therefore CS = \left\langle -\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \infty \right\rangle$$

Rpta.: E

Resolución 7: Fácilmente podemos reconocer que m y n son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

Por propiedades tenemos:

$$m + n = 5 \quad \wedge \quad mn = 1$$

Por equivalencia se plantea:

$$m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2(mn)$$

$$m^2 + n^2 = (5)^2 - 2(1)$$

$$m^2 + n^2 = 25 - 2$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 23$$

Rpta.: D

Resolución 8: La inecuación dada es:

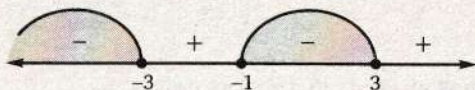
$$x^3 + x^2 - 9x - 9 \leq 0$$

$$x^2(x+1) - 9(x+1) \leq 0$$

$$(x+1)(x^2 - 9) \leq 0$$

$$(x+1)(x+3)(x-3) \leq 0$$

Finalmente en la recta real:



$$\therefore CS = \langle -\infty; -3] \cup [-1; 3]$$

Rpta.: C

Resolución 9: La inecuación propuesta es:

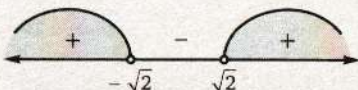
$$x^4 - x^2 - 2 > 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 1) > 0$$

Como $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, solo queda que:

$$x^2 - 2 > 0$$

$$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) > 0$$



Observa que:

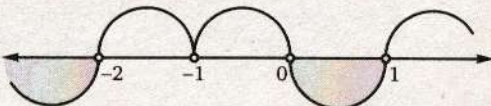
$$CS = \langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \infty \rangle$$

$$\therefore (CS)' = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

Rpta.: B

Resolución 10: La inecuación dada es:

$$(x-1)^7(x+1)^4(x+2)^3x < 0$$

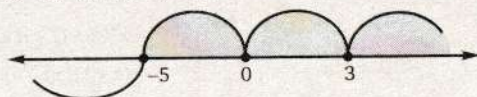


$$\therefore CS = \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$$

Rpta.: B

Resolución 11: La inecuación dada es:

$$(x-3)^{10}(x+5)^{13}x^4 \geq 0$$



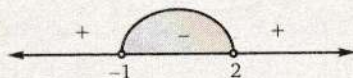
$$\therefore CS = [-5; \infty)$$

Rpta.: C**Resolución 12:** La inecuación dada es:

$$\begin{aligned} \frac{5x}{x-2} &> \frac{6x+1}{x-2} \\ \frac{5x}{x-2} - \frac{6x+1}{x-2} &> 0 \\ \frac{-x-1}{x-2} &> 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 :

$$\frac{x+1}{x-2} < 0$$

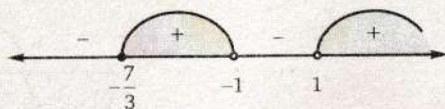


$$\therefore CS = (-1; 2)$$

Rpta.: D**Resolución 13:** La inecuación propuestas es:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x-1} &\geq \frac{2}{x+1} \\ \frac{5}{x-1} - \frac{2}{x+1} &\geq 0 \\ \frac{5x+5-2x+2}{(x-1)(x+1)} &\geq 0 \\ \frac{3x+7}{(x-1)(x+1)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Finalmente en la recta real:



$$\therefore CS = \left[-\frac{7}{3}; -1\right) \cup (1; \infty)$$

Rpta.: E

Resolución 14: La inecuación propuesta es:

$$\frac{x+5}{x+3} \leq \frac{x-1}{x+1}$$

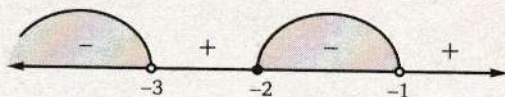
$$\frac{x+5}{x+3} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{(x+5)(x+1) - (x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 6x + 5 - x^2 - 2x + 3}{(x+3)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{4x+8}{(x+3)(x+1)} \leq 0$$

Finalmente en la recta real:

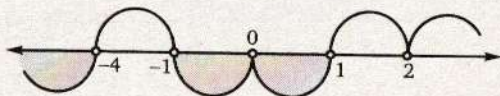


$$\therefore CS = \langle -\infty; -3 \rangle \cup [-2; 1)$$

Rpta.: D

Resolución 15: La inecuación dada es:

$$\frac{(x-1)^7(x+4)x^4}{(x-2)^2(x+1)} < 0$$

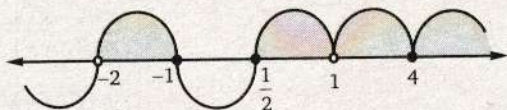


$$\therefore CS = \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle -1; 1 \rangle - \{0\}$$

Rpta.: C

Resolución 16: La inecuación dada es:

$$\frac{(x-4)^6(2x-1)^{13}(x+1)^{15}}{(x-1)^4(x+2)^3} \geq 0$$



$$\therefore \text{CS} = \langle -2; -1 \rangle \cup \left[\frac{1}{2}; \infty \right) - \{1\}$$

Rpta.: A

Resolución 17: La ecuación dada es:

$$|2x-1| = 4$$

Según la teoría:

$$2x-1=4 \vee 2x-1=-4$$

$$2x=5 \vee 2x=-3$$

$$x=\frac{5}{2} \vee x=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}$$

Rpta.: C

Resolución 18: La ecuación dada es:

$$|5x+1| = x$$

Según la teoría se cumple que:

$$x \geq 0 \wedge (5x+1=x \vee 5x+1=-x)$$

$$x \geq 0 \wedge (4x=-1 \vee 6x=-1)$$

$$x \geq 0 \wedge \underbrace{\left(x=-\frac{1}{4} \vee x=-\frac{1}{6} \right)}_{x \in \emptyset}$$

$$\therefore \text{CS} = \emptyset$$

Rpta.: E

Resolución 19: La inecuación dada es:

$$|3x + 2| > x - 1$$

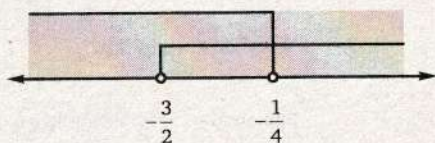
Según la teoría se cumple que:

$$3x + 2 > x - 1 \vee 3x + 2 < -x + 1$$

$$2x > -3 \vee 4x < -1$$

$$x > -\frac{3}{2} \vee x < -\frac{1}{4}$$

En la recta real:



$$\therefore CS = (-\infty; \infty)$$

Rpta.: A

Resolución 20: La inecuación dada es:

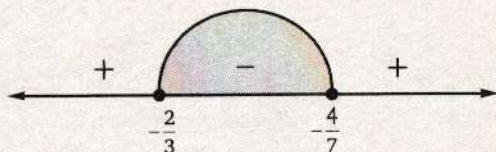
$$|5x + 3| \leq |2x + 1|$$

Por propiedad tenemos:

$$(5x + 3 + 2x + 1)(5x + 3 - 2x - 1) \leq 0$$

$$(7x + 4)(3x + 2) \leq 0$$

Finalmente en la recta real:



$$\therefore CS = \left[-\frac{2}{3}; -\frac{4}{7} \right]$$

Rpta.: E

Resolución 21: Por condición tenemos:

$$\frac{1}{4} < \frac{2x-1}{x+3} < \frac{3}{5}$$

Sumando (-2) conseguimos:

$$\frac{1}{4} - 2 < \frac{2x-1}{x+3} - 2 < \frac{3}{5} - 2$$

$$-\frac{7}{4} < -\frac{7}{x+3} < -\frac{7}{5}$$

Multiplicando por $\left(-\frac{1}{7}\right)$:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{4}$$

Tomando el recíproco:

$$4 < x+3 < 5$$

Sumando (-3) obtenemos:

$$1 < x < 2$$

Finalmente podemos notar:

$$\text{Inf}(A) = 1 \text{ y } \text{Sup}(A) = 2$$

$$\therefore \text{Inf}(A) + \text{Sup}(A) = 3$$

Rpta.: D

Resolución 22: Por propiedad para números positivos podemos establecer lo siguiente:

$$MA \geq MG$$

$$\frac{x + x^2 + \frac{1}{x^3}}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^3}}$$

Multiplicando por (3) :

$$x + x^2 + \frac{1}{x^3} \geq 3 \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{1}{x^3}}$$

$$x + x^2 + \frac{1}{x^3} \geq 3(1)$$

Finalmente tenemos:

$$x + x^2 + \frac{1}{x^3} \geq 3$$

$$\therefore \text{Inf}(A) = 3$$

Rpta.: C

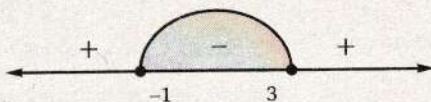
Resolución 23: La inecuación dada es:

$$(x+1)^2 - 4(x+1) \leq 0$$

Transformando tenemos:

$$(x+1)(x-3) \leq 0$$

Finalmente en la recta real tenemos:



$$\therefore CS = [-1; 3]$$

Rpta.: B

Resolución 24: La inecuación dada es:

$$P^2(x) - 5P(x) + 6 \leq 0$$

Dando uso del aspa simple:

$$[P(x) - 2][P(x) - 3] \leq 0$$

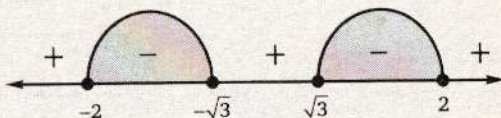
Reemplazando a $P(x)$:

$$(x^2 - 3)(x^2 - 4) \leq 0$$

Transformando tenemos:

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x - 2)(x + 2) \leq 0$$

Ahora en la recta real:



Observa que los valores enteros que asume "x" son -2 y 2.

$$\therefore N^{\circ} \text{ de valores} = 2$$

Rpta.: B

Resolución 25: La inecuación dada es:

$$x^2 + Kx - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

$$-x^2 + (K+2)x - 4 < 0$$

Multiplicando por (-1) :

$$x^2 - (K+2)x + 4 > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Por propiedad tenemos:

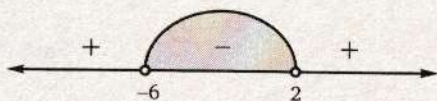
$$[-(K+2)]^2 - 4(1)(4) < 0$$

$$(K+2)^2 - (4)^2 < 0$$

Por diferencia de cuadrados:

$$(K+6)(K-2) < 0$$

Ahora en la recta real:



$$\therefore K \in (-6; 2)$$

Rpta.: A

Resolución 26: La inecuación dada es:

$$(x-1)^3(x^2+3x+4)(x-1)(x^2+x+1) > 0$$

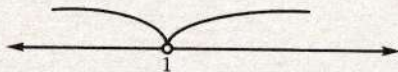
Una rápida inspección permite reconocer a los trinomios positivos: $x^2 + 3x + 4$;

$x^2 + x + 1 > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$, ahora la inecuación dada queda reducida a:

$$(x-1)^3 \cdot (x-1) > 0$$

$$(x-1)^4 > 0$$

Por puntos de referencia:



$$CS = \langle -\infty; 1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$$

Por condición tenemos:

$$a = 1 \text{ y } b = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2$$

Rpta.: C

Resolución 27: Una rápida inspección permite reconocer un par de trinomios positivos:

$$x^2 + x + 1; x^4 + x^2 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R},$$

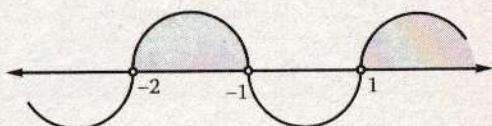
Ahora la inecuación dada queda reducida a:

$$(x + 2)^3(x^2 - 1) > 0$$

Transformando tenemos:

$$(x + 2)(x + 1)(x - 1) > 0$$

Por puntos de referencia:



$$\therefore CS = (-2; -1) \cup (1; \infty)$$

Rpta.: A

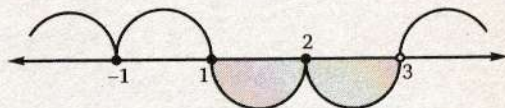
Resolución 28: Observa que:

$$x^2 + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

Ahora la inecuación dada queda reducida a:

$$\frac{(x - 2)^4(x - 1)^5(x + 1)^2}{(x - 3)^7} \leq 0$$

Por puntos de referencia:



$$\therefore CS = [1; 3) \cup \{-1\}$$

Rpta.: C

Resolución 29: Fácilmente podemos reconocer que:

$$\frac{x+3}{x-5} = 1 + \frac{8}{x-5}$$

Por condición: $x \in [2; 4]$; es decir:

$$2 \leq x \leq 4$$

Sumando (-5) obtenemos:

$$-3 \leq x - 5 \leq -1$$

Tomando el recíproco:

$$-1 \leq \frac{1}{x-5} \leq -\frac{1}{3}$$

Multiplicando por (8) tenemos:

$$-8 \leq \frac{8}{x-5} \leq -\frac{8}{3}$$

Finalmente sumando (1) :

$$-7 \leq 1 + \frac{8}{x-5} \leq -\frac{5}{3}$$

$$-7 \leq \frac{x+3}{x-5} \leq -\frac{5}{3}$$

$$\therefore m = -\frac{5}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 30: La inecuación dada es:

$$1 < \frac{3x+10}{x+7} < 2$$

Sumando (-3) tenemos:

$$1-3 < \frac{3x+10}{x+7} - 3 < 2-3$$

$$-2 < \frac{-11}{x+7} < -1$$

Multiplicando por $-\frac{1}{11}$:

$$\frac{1}{11} < \frac{1}{x+7} < \frac{2}{11}$$

Tomando el recíproco:

$$\frac{11}{2} < x+7 < 11$$

Finalmente sumando (-7) :

$$-\frac{3}{2} < x < 4$$

$$\therefore CS = \left(-\frac{3}{2}; 4 \right)$$

Rpta.: C

Resolución 31: La inecuación dada es:

$$\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$$

De acuerdo al conjunto de valores admisibles (C. V. A.) en $\mathbb{R}$ para el radical de índice par debemos plantear:

$$x-2 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 2$$

Ahora la inecuación:

$$\sqrt{x-2} \sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$$

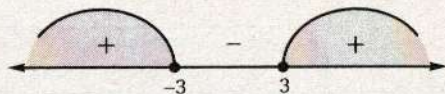
Queda reducida a: $\sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$ pues: $\sqrt{x-2} \geq 0; \forall x \geq 2$:

$$\sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$$

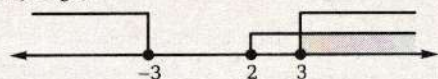
Elevando al cubo: $x^2-9 \geq 0$

$$(x+3)(x-3) \geq 0$$

En la recta real:



Pero recuerda que $x \geq 2$; luego;



$$\therefore \text{CS} = [3; \infty) \cup \{2\}$$

Rpta.: E

Resolución 32: La inecuación dada es:

$$\sqrt{2-\sqrt{9-x}} \geq 1$$

De acuerdo con la forma:

$$2-\sqrt{9-x} \geq 0 \wedge 2-\sqrt{9-x} \geq 1$$

Transformando tenemos:

$$\sqrt{9-x} \leq 2 \wedge \sqrt{9-x} \leq 1$$

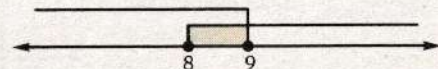
De la intersección obtenemos:

$$\sqrt{9-x} \leq 1$$

Ahora según la forma:

$$9-x \geq 0 \wedge 9-x \leq 1$$

$$x \leq 9 \wedge x \geq 8$$



Notamos que los valores enteros que asume "x" son 8 y 9:

$$\therefore \text{N}^\circ \text{ de valores} = 2$$

Rpta.: A

Resolución 33: La inecuación dada es:

$$\sqrt{10-x} > \sqrt{4-\sqrt{8-x}}$$

De donde se cumple:

$$10-x \geq 0 \wedge 4-\sqrt{8-x} \geq 0 \wedge 10-x > 4-\sqrt{8-x}$$

Reacomodando tenemos:

$$x \leq 10 \wedge \underbrace{\sqrt{8-x} \leq 4}_I \wedge \underbrace{\sqrt{8-x} > x-6}_{II} \dots\dots\dots (1)$$

Halleamos la solución (I):

$$\sqrt{8-x} \leq 4$$

$$8-x \geq 0 \wedge 8-x \leq 16$$

$$x \leq 8 \wedge x \geq -8$$

$$-8 \leq x \leq 8 \dots\dots\dots (2)$$

Halleamos la solución (II):

$$\sqrt{8-x} > x-6$$

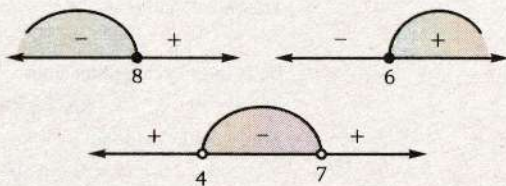
$$S_1: \quad 8-x \geq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge 8-x > (x-6)^2$$

$$x-8 \leq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge 8-x > x^2-12x+36$$

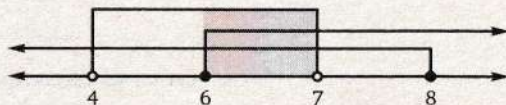
$$x-8 \leq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge -x^2+11x-28 > 0$$

$$x-8 \leq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge x^2-11x+28 < 0$$

$$x-8 \leq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge (x-7)(x-4) < 0$$



De la intersección:

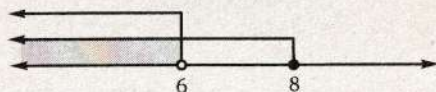


Podemos observar que:

$$6 \leq x < 7$$

$$S_2 : \quad \begin{aligned} 8 - x &\geq 0 \wedge x - 6 < 0 \\ x &\leq 8 \wedge x < 6 \end{aligned}$$

De la intersección:



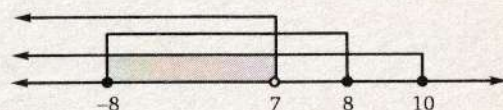
Podemos observar que:

$$x < 6$$

Recuerda que la solución II viene dada por $S_1 \cup S_2$; es decir:

$$x < 6 \vee 6 \leq x < 7 \Leftrightarrow x < 7 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Finalmente con: (1); (2) y (3)



El conjunto solución es:

$$CS = [-8; 7)$$

$$\therefore \text{Sup}(CS) = 7$$

Rpta.: D**Resolución 34:** La ecuación dada es:

$$|x|^3 + |x| - 3 = x^3$$

Primer caso:

$$x \geq 0$$

$$x^3 + x - 3 = x^3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{es una solución!}$$

Segundo caso:

$$x < 0$$

$$-x^3 - x - 3 = x^3 \Leftrightarrow -2x^3 - x - 3 = 0$$

$$2x^3 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 2x + 3) = 0$$

Observa que: $2x^2 - 2x + 3 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ razón por la cual la igualdad anterior se reduce a:

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{es la solución}$$

$$\therefore \Sigma \text{ de soluciones} = 2$$

Rpta.: E

Resolución 35: La ecuación dada es:

$$|2(x-3)| + |5(3-x)| = 14$$

Por teorema tenemos:

$$2|x-3| + 5|3-x| = 14$$

$$2|x-3| + 5|x-3| = 14$$

$$7|x-3| = 14$$

$$|x-3| = 2$$

De donde se cumple:

$$x-3=2 \vee x-3=-2$$

$$x=5 \vee x=1$$

$\therefore$ Producto de soluciones = 5

Rpta.: B

Resolución 36: La ecuación dada es:

$$||x|-3| = |3-2|x||$$

Por propiedad tenemos:

$$(|x|-3+3-2|x|)(|x|-3-3+2|x|) = 0$$

$$(-|x|)(3|x|-6) = 0$$

De donde se cumple:

$$-|x|=0 \vee 3|x|-6=0$$

$$|x|=0 \vee 3|x|=6$$

$$|x|=0 \vee |x|=2$$

$$x=0 \vee (x=2 \vee x=-2)$$

Finalmente tenemos:

$$CS = \{-2; 0; 2\}$$

$\therefore$ N° de soluciones = 3

Rpta.: D

Resolución 37: La inecuación dada es:

$|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2$, por teorema debemos plantear lo siguiente

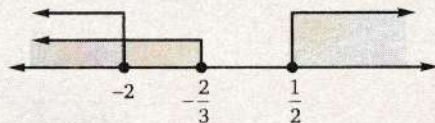
$$x^2 + 3x \geq 2 - x^2 \vee x^2 + 3x \leq -(2 - x^2)$$

$$x^2 + 3x \geq 2 - x^2 \vee x^2 + 3x \leq -2 + x^2$$

$$2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \vee 3x \leq -2$$

$$(2x - 1)(x + 2) \geq 0 \vee x \leq -\frac{2}{3}$$

En la recta real



Podemos notar:

$$CS = \left\langle -\infty; -\frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty \right)$$

O también:

$$\therefore CS = \mathbb{R} - \left\langle -\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$$

Rpta.: E

Resolución 38: Una rápida inspección permite observar que:

$$x^2 - 2x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Con lo cual:

$$|x^2 - 2x + 4| = x^2 - 2x + 4$$

La inecuación dada es:

$$x^2 - 2x + 4 + |x + 1| < x^2$$

$$|x + 1| < 2x - 4$$

Por teorema tenemos:

$$2x - 4 > 0 \wedge -(2x - 4) < x + 1 < (2x - 4)$$

$$2(x - 2) > 0 \wedge -2x + 4 < x + 1 < 2x - 4$$

$$x - 2 > 0 \wedge \underbrace{-2x + 4 < x + 1 < 2x - 4}_{I} \dots\dots\dots(1)$$

Resolviendo I:

$$x + 1 > -2x + 4 \wedge 2x - 4 > x + 1$$

$$3x > 3 \wedge x > 5$$

$$x > 1 \wedge x > 5 \Leftrightarrow x > 5 \dots\dots\dots(2)$$

Ahora con (1) y (2):

$$x - 2 > 0 \wedge x > 5$$

$$x > 2 \wedge x > 5 \Leftrightarrow x > 5$$

$$\therefore CS = \langle 5; \infty \rangle$$

Rpta.: C

Resolución 39: La inecuación dada es:

$$1 < \sqrt{(x-2)^2} \leq 3$$

$$1 < |x-2| \leq 3$$

Por propiedad tenemos:

$$-3 \leq x-2 < -1 \quad \vee \quad 1 < x-2 \leq 3$$

Sumando (2) obtenemos:

$$-1 \leq x < 1 \quad \vee \quad 3 < x \leq 5$$

Los valores enteros de x son:

$$-1; 0; 4; 5$$

$$\therefore \text{N}^\circ \text{ de soluciones enteras} = 4$$

Rpta.: B

Resolución 40: Observa que:

$$\frac{5-3\pi}{\pi+2} = -3 + \frac{11}{\pi+2}$$

Con lo cual tenemos:

$$\left\lfloor \frac{5-3\pi}{\pi+2} \right\rfloor = \left\lfloor -3 + \frac{11}{\pi+2} \right\rfloor$$

Por teorema: $\left\lfloor \frac{5-3\pi}{\pi+2} \right\rfloor = -3 + \left\lfloor \frac{11}{\pi+2} \right\rfloor \dots\dots\dots(1)$

Ahora planteamos: $3 < \pi < 4$

Sumando (2) tenemos:

$$5 < \pi+2 < 6$$

Tomando el recíproco:

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{\pi+2} < \frac{1}{5}$$

Multiplcando por (11):

$$\frac{11}{6} < \frac{11}{\pi+2} < \frac{11}{5}$$

$$1,8 < \frac{11}{\pi+2} < 2,2$$

Ahora notamos que:

$$\left\lfloor \frac{11}{\pi+2} \right\rfloor = 2 \dots\dots\dots(2)$$

Finalmente (2) en (1):

$$\left\lfloor \frac{5-3\pi}{\pi+2} \right\rfloor = -3 + 2$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{5-3\pi}{\pi+2} \right\rfloor = -1$$

Rpta.: A

Resolución 41: Por teorema: $4 \leq \frac{|x-1|+2}{3} < 5$

$$12 \leq |x-1| + 2 < 15$$

Sumando (-2) : $10 \leq |x-1| < 13$

Por propiedad: $-13 < x-1 \leq -10 \vee 10 \leq x-1 < 13$

$$-12 < x \leq -9 \vee 11 \leq x < 14$$

$$\therefore CS = (-12; -9] \cup [11; 14)$$

Rpta.: D

Resolución 42: Hagamos que: $2x + 1 = n$;

donde $n \in \mathbb{Z}$; pues es un máximo entero.

$$x = \frac{n-1}{2} \quad \dots\dots(1)$$

En la ecuación: $\left\lceil 3\left(\frac{n-1}{2}\right) - 5 \right\rceil = n$

$$\left\lceil \frac{3n-3}{2} - 5 \right\rceil = n \Rightarrow \left\lceil \frac{3n-13}{2} \right\rceil = n$$

Por teorema: $n \leq \frac{3n-13}{2} < n+1$

$$2n \leq 3n - 13 < 2n + 2$$

Equivalente: $3n - 13 \geq 2n \wedge 3n - 13 < 2n + 2$

$$n \geq 13 \wedge n < 15$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, tenemos: $n = 13$ ó $n = 14$

En (1) obtenemos:

$$n = 13 \Rightarrow x = 6$$

$$n = 14 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$$

$$\therefore CS = \left\{ 6; \frac{13}{2} \right\}$$

Rpta.: B

Resolución 43: La ecuación dada es: $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = x + 2$

Hagamos que $x + 2 = n$; donde $n \in \mathbb{Z}$; pues es un máximo entero:

$$x = n - 2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

En la ecuación: $\left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor = n$

Por teorema: $n \leq \frac{n-2}{3} < n+1$

$$3n \leq n-2 < 3n+3$$

Equivalentemente: $3n \leq n-2 \wedge 3n+3 > n-2$

$$2n \leq -2 \wedge 2n > -5$$

$$n \leq -1 \wedge n > -\frac{5}{2}$$

Como $n \in \mathbb{Z}$; tenemos: $n = -2$ ó $n = -1$

En (1) obtenemos: $n = -2 \Rightarrow x = -4$

$$n = -1 \Rightarrow x = -3$$

$$\therefore CS = \{-4; -3\}$$

Rpta.: C

Resolución 44: En busca del elemento genérico del conjunto A, a partir de la condición:

$$|x| < 3$$

$$-3 < x < 3$$

Sumando (-4) tenemos:

$$-7 < x - 4 < -1$$

$$-1 < \frac{1}{x-4} < -\frac{1}{7}$$

Con el valor absoluto:

$$\frac{1}{7} < \left| \frac{1}{x-4} \right| < 1$$

$\swarrow$ ínfimo $\searrow$ supremo

Finalmente tenemos: $\text{Inf}(A) + \text{Sup}(A) = \frac{1}{7} + 1$

$$\therefore \text{Inf}(A) + \text{Sup}(A) = \frac{8}{7}$$

Rpta.: A

Resolución 45: Podemos observar que:

$$\frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$$

Por condición tenemos:

$$-2 \leq x < 2$$

Sumando (3) tenemos:

$$1 \leq x+3 < 5$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{x+3} \leq 1$$

Sumando (1) obtenemos:

$$\frac{6}{5} < 1 + \frac{1}{x+3} \leq 2$$

$$\frac{6}{5} < \frac{x+4}{x+3} \leq 2$$

En forma equivalente:

$$1 < \frac{x+4}{x+3} < 2 \quad \vee \quad \frac{x+4}{x+3} = 2$$

De donde podemos notar que:

$$\left\lfloor \frac{x+4}{x+3} \right\rfloor = 1 \quad \vee \quad \left\lceil \frac{x+4}{x+3} \right\rceil = 2$$

Con lo cual afirmamos que:

$$\text{Inf}(A) = 1 \quad \text{y} \quad \text{Sup}(A) = 2$$

$$\therefore \text{Inf}(A) \cdot \text{Sup}(A) = 2$$

Rpta.: B

Resolución 46: Hagamos que: $\sqrt{x+1} = m$; luego: $x = m^2 - 1$; ahora la inecuación dada asume

la forma:
$$\frac{(m^2-1)^2}{(m^2-m)^2} < \frac{(m^2-1)^2 + 3(m^2+1) + 18}{m^4}$$

$$\frac{(m+1)^2(m-1)^2}{m^2 \cdot (m-1)^2} < \frac{m^4 + m^2 + 16}{m^4} \quad \dots\dots\dots (*)$$

Si $m \neq 0$; entonces: $x \neq -1$
 Si $m \neq 1$; entonces: $x \neq 0$ } En (*) tenemos:

$$m^2 \cdot (m+1)^2 < m^4 + m^2 + 16$$

$$m^4 + 2m^3 + m^2 < m^4 + m^2 + 16$$

$$2m^3 - 16 < 0$$

$$m^3 - 8 < 0$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 09

Por diferencia de cubos:

$$(m-2)(m^2+2m+4) < 0$$

Como: $m^2+2m+4 > 0$; $\forall m \in \mathbb{R}$:

$$m-2 < 0$$

$$m < 2$$

Reponiendo la incógnita:

$$\sqrt{x-1} < 2$$

De acuerdo con la teoría:

$$x+1 \geq 0 \wedge x+1 < 4$$

$$x \geq -1 \wedge x < 3$$

$$-1 \leq x < 3$$

Pero:

$$x \neq -1; x \neq 0$$

$$\therefore CS = (-1; 3) - \{0\}$$

Rpta.: D

Resolución 47: La inecuación dada es:

$$\frac{x+b}{x+a} - \frac{x-b}{x-a} - \frac{2(b^2-ab)}{(x+a)(x-a)} \leq 0$$

Efectuando operaciones:

$$\frac{(x+b)(x-a) - (x-b)(x+a) - 2(b^2-ab)}{(x+a)(x-a)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + (b-a)x - ab - x^2 - (a-b)x + ab - 2(b^2-ab)}{(x+a)(x-a)} \leq 0$$

Reduciendo términos:

$$\frac{-2(a-b)x + 2b(a-b)}{(x+a)(x-a)} \leq 0$$

$$\frac{-2(a-b)(x-b)}{(x+a)(x-a)} \leq 0 \quad \dots\dots(*)$$

Por condición tenemos:

$$a > b \iff (a-b) < 0$$

Es evidente apreciar:

$$-2(a-b) > 0$$

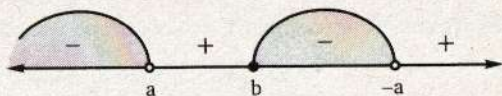
Ahora en (*) tenemos:

$$\frac{x-b}{(x+a)(x-a)} \leq 0$$

Según puntos de corte:

$$x = b; x = -a; x = a$$

Finalmente con $a < b < 0$:



$$\therefore CS = (-\infty; a) \cup [b; -a)$$

Rpta.: A

Resolución 48:

Una rápida inspección permite apreciar que:

$$||x+4|-9|+x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego la inecuación dada es:

$$||x+4|-9|+x^2 \leq x^2+x+1$$

$$||x+4|-9| \leq x+1$$

Resulta evidente que: $x+1 \geq 0$, en consecuencia:

$$|x+4| = x+4, \text{ por tanto tenemos:}$$

$$|x+4-9| \leq x+1$$

$$|x-5| \leq x+1$$

De donde se cumple que:

$$x+1 \geq 0 \wedge (-x-1 \leq x-5 \leq x+1)$$

$$x+1 \geq 0 \wedge (x-5 \geq -x-1 \wedge x-5 \leq x+1)$$

$$x+1 \geq 0 \wedge (2x \geq 4 \wedge 0 \leq 6)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Simplificando tenemos:

$$x+1 \geq 0 \wedge 2x \geq 4$$

$$x \geq -1 \wedge x \geq 2$$

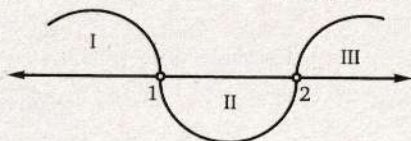
De la intersección resulta:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2; \infty)$$

$$\therefore CS = [2; \infty)$$

Rpta.: A

Resolución 49: Redefiniendo la ecuación planteamos un criterio por zonas, veamos:



Observa que cada punto que limita la zona fue obtenida igualando a cero cada valor absoluto.

$$\text{I. } -\infty < x < 1: \quad |x-1| + |x-2| = x+7$$

Eliminando barras:

$$-(x-1) - (x-2) = x+7$$

$$-2x+3 = x+7 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3} = x$$

Como $x = -\frac{4}{3}$ se encuentra en la zona analizada; $-\frac{4}{3}$ es la solución de la ecuación.

$$\text{II. } 1 \leq x < 2: \quad |x-1| + |x-2| = x+7$$

Eliminando barras:

$$x-1 - (x-2) = x+7$$

$$1 = x+7 \quad \Leftrightarrow \quad -6 = x$$

Como $x = -6$ no se encuentra en la zona analizada; -6 no es solución de la ecuación.

$$\text{III. } 2 \leq x < \infty: \quad |x-1| + |x-2| = x+7$$

Eliminando barras:

$$x-1 + x-2 = x+7$$

$$2x-3 = x+7 \quad \Leftrightarrow \quad x=10$$

Resulta evidente que $x = 10$ es solución de la ecuación, luego tenemos que:

$$CS = \left\{ -\frac{4}{3}; 10 \right\}$$

$$\therefore n(CS) = 2$$

Rpta.: C

Resolución 50: La inecuación dada es:

$$\frac{|2x+3|-|x-8|}{|2x-1|-|7x-8|} \geq 0$$

Con la finalidad de eliminar el valor absoluto, multiplicaremos a ambos miembros de la inecuación por la siguiente expresión positiva:

$$\frac{|2x+3|+|x-8|}{|2x-1|+|7x-8|}$$

En la inecuación:

$$\frac{(|2x+3|+|x-8|)(|2x+3|-|x-8|)}{(|2x-1|+|7x-8|)(|2x-1|-|7x-8|)} \geq 0$$

Por diferencia de cuadrados:

$$\frac{|2x+3|^2 - |x-8|^2}{|2x-1|^2 - |7x-8|^2} \geq 0$$

Por teorema tenemos:

$$\frac{(2x+3)^2 - (x-8)^2}{(2x-1)^2 - (7x-8)^2} \geq 0$$

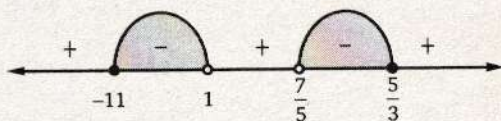
$$\frac{(3x-5)(x+11)}{(9x-9)(-5x+7)} \geq 0$$

Multiplicando por -9 :

$$\frac{(3x-5)(x+11)}{(x-1)(5x-7)} \leq 0$$

Finalmente en la recta real ubicamos ordenadamente a los puntos

$\frac{5}{3}$; -11 ; 1 ; $\frac{7}{5}$ y obtenemos:



$$\therefore \text{CS} = [-11; 1) \cup \left(\frac{7}{5}; \frac{5}{3}\right]$$

Rpta.: D

Resolución 51:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 3 > 1 \rightarrow x > 2\}$$

$$2x - 3 > 1 \rightarrow x > 2 \Leftrightarrow \sim (2x - 3 > 1) \vee x > 2$$

$$2x - 3 \leq 1 \vee x > 2$$

$$x \leq 2 \vee x > 2$$

$$\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = \mathbb{R}$$

$$\therefore A^c = \emptyset$$

Rpta.: A**Resolución 52:**

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / \sim [(3x + 1 < 7) \vee (2x - 1 > 13)]\}$$

$$\sim [(3x + 1 < 7) \vee (2x - 1 > 13)] \Leftrightarrow 3x + 1 \geq 7 \wedge 2x - 1 \leq 13$$

$$x \geq 2 \wedge x \leq 7$$

$$\Rightarrow A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$\therefore \cap(A) = 6$$

Rpta.: D

Resolución 53: En cada afirmación: I. $\exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} > x^4$ (V)

Por ejemplo si: $x = \frac{1}{4}$:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

II. $\exists x \in \mathbb{R} / |x| > 2^x$ (V)

Por ejemplo si: $x = -1$:

$$|-1| = 1 > 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

III. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 > 0$ (F)

$$\text{Si } x = 1 \in \mathbb{R} : 1 - 2 + 1 = 0 > 0$$

Rpta.: B

DESIGUALDADES E INECUACIONES

Resolución 54: Se tiene: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ y $B = \{2; 3; 5; 7\}$

$$p: \exists x \in A / \forall y \in B; x + y > 3 \quad \dots\dots(V)$$

$$q: \forall x \in A; \forall y \in B; x^2 + y^2 \geq 5 \quad \dots\dots(V)$$

$$r: \forall x \in A; \exists y \in B / xy \text{ es par} \quad \dots\dots(V)$$

Rpta.: B

Resolución 55: En cada proposición tenemos:

$$p: \forall x \in \{4; 6\}; \exists y \in \{1; 3\} / x + y \leq xy \quad \dots\dots(V)$$

$$q: \exists x \in \{-2; -3\} / \exists y \in \{-1; -2\} : x - y < x^2 \quad \dots\dots(V)$$

$$r: \forall x \in \mathbb{N} / \forall y \in \{1; 2\} : x + y < x^2 - 1 \quad \dots\dots(F)$$

$$\text{Por ejemplo si: } y=1: x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 2$$

Rpta.: B

Resolución 56: En cada proposición:

$$\text{I. } \forall x \in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{R} / x + 1 > y > x \quad \dots\dots(V)$$

$$\text{II. } \exists x \in \mathbb{N}; \forall y \in \mathbb{R} / y^2 > x > (y-1)^2 \quad \dots\dots(F)$$

$$\text{Por ejemplo si: } y=1 \Rightarrow 1 > x > 0$$

$$\text{III. } \forall x \in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{R} / \underbrace{(x \leq (y-1)^2) \vee (y^2 \leq x)}_V \quad \dots\dots(V)$$

V

$$\text{IV. } \forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{N} / \underbrace{(y \geq x) \vee (y+1 \leq x)}_V \quad \dots\dots(V)$$

V

Rpta.: D

Resolución 57: Por condición:

$$a < 0 < b$$

I. $\frac{a-b}{ab^2} > 0$ (V)

$$* a - b < 0 \wedge ab^2 < 0$$

II. $\frac{a^2+b}{b-a+1} > 0$ (V)

$$* b - a > 0 \wedge a^2 + b < 0$$

III. $a^3 - b^3 < 3ab(a-b)$ (V)

$$* a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

$$(a-b)^3 < 0 \Leftrightarrow a^3 - b^3 - 3(ab)(a-b) < 0$$

$$a^3 - b^3 < 3(ab)(a-b)$$

Rpta.: A**Resolución 58:** En cada afirmación:

I. Si $x > 0 \wedge |y| < 1$; entonces:

$$xy + x + 1 > 1$$
(V)

$$* |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$$

$$-x < xy < x$$

$$0 < xy + x < 2x$$

$$1 < xy + x + 1 < 2x + 1$$

En efecto: $xy + x + 1 > 1$

II. Si $(x; y) \in \mathbb{R}^+$; entonces el máximo valor de:

$$\frac{5xy}{x^2 + y^2 + 3xy} \text{ es } 1$$
(V)

$$* \frac{5xy}{x^2 + y^2 + 3xy} = \frac{5}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3} = E$$

Se sabe que: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3 \geq 5$

Equivalentemente: $5 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3 < \infty$

$$0 < \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3} \leq \frac{1}{5}$$

$$0 < \frac{5}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3} \leq 1$$

$$0 < E \leq 1 \Rightarrow E_{(\text{máx})} = 1$$

III. Si $x^2 - x^4 + 3 < M$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Entonces el menor valor entero es 3(F)

* Se sabe que: $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^4 - x^2 \geq -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - x^4 \leq \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x^4 + 3 \leq \frac{13}{4} < 4 < 5 < 6 < \dots\dots\dots$$

$\Rightarrow$ El menor valor entero M es 4.

Rpta.: B

Resolución 59: Condición: $x^2 + y^2 = 1$; $x, y \in \mathbb{R}$

En busca de: $T = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

Cauchy - Scharzw: $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 \leq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)(x^2 + y^2)$

$$T^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq T \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente tenemos:

$$\therefore T \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Rpta.: C

Resolución 60:

$$T \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq T \leq 1$$

Como:

$$a < b \Rightarrow b - a > 0$$

Ahora:

$$0 \leq T(b - a) \leq b - a$$

$$0 \leq Tb - Ta \leq b - a$$

$$a \leq Tb + a - Ta \leq b$$

$$a \leq Tb + a(1 - T) \leq b$$

Por condición $x \in [a; b]$, luego se podría establecer que:

$$\therefore x = Tb + a(1 - T)$$

Rpta.: E**Resolución 61:**

Por condición:

$$a < b < 0$$

La inecuación es:

$$\frac{(a^2 + b^2)x - (a + b)}{ab} > \frac{(a + b)x - 3}{a + b}$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} \right) x - \frac{a + b}{ab} > x - \frac{3}{a + b}$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} - 1 \right) x > \frac{a + b}{ab} - \frac{3}{a + b}$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - ab}{ab} \right) x > \frac{a^2 + b^2 - ab}{ab(a + b)}$$

Como $a < b < 0 \Rightarrow ab > 0$:

$$x > \frac{1}{a + b}$$

$$\therefore x \in \left(\frac{1}{a + b}; \infty \right)$$

Rpta.: B**Resolución 62:**

En el primer conjunto:

$$x \leq 2 \rightarrow x > 10 \Leftrightarrow -(x \leq 2) \vee x > 10$$

$$x > 2 \vee x > 10$$

$$x > 2$$

Fácilmente reconocemos que si $x + \frac{2}{x} \in \mathbb{Z}$; se cumple que:

$$x + \frac{2}{x} = 4; 5; 6; \dots$$

Finalmente:

$$A = \{4; 5; 6; \dots\} \cap [1; 6]$$

$$A = \{4; 5; 6\}$$

$$\therefore n(A) = 3$$

Rpta.: C

DESIGUALDADES E INECUACIONES

Resolución 63: Por condición:

$$b < 0 < a; \text{ luego: } a - b > 0$$

A) $ax + 2ab \leq 2a^2 + 2ab \Leftrightarrow ax \leq 2a^2$

$$x \leq 2a$$

Observa que: $A = \langle -\infty; 2a \rangle$

B) $by - b^2 < ay - a^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < ay - by$

$$ay - by > a^2 - b^2$$

$$(a - b)y > (a + b)(a - b)$$

$$y > a + b$$

Observa que: $y \in \langle a + b; \infty \rangle$

Finalmente:

$$\therefore A \cap B = \langle a + b; 2a \rangle$$

Rpta.: D**Resolución 64:** En cada afirmación:

I. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \left|x + \frac{1}{x}\right| \leq 2 \quad \dots\dots\dots(F)$

* Si $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

* Si $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

Por tanto: $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$

II. $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0 \quad \dots\dots\dots(V)$

* $|x + y|^2 = (|x| + |y|)^2$

$$(x + y)^2 = (|x| + |y|)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2|x||y|$$

$$xy = |x||y|$$

Como $|x||y| = |xy| \geq 0$

$$\Rightarrow xy \geq 0$$

III. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \quad \dots\dots\dots(V)$

* Por teorema: $||x| - |y|| \leq |x - y|; \forall x, y \in \mathbb{R}$

Como $y \in \mathbb{R}; (-y) \in \mathbb{R}$. Ahora reemplazamos "y" por "-y"

$$||x| - |-y|| \leq |x + y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

Rpta.: C

Resolución 65: Se tiene: $|x - a + b| = |x + a - b|$

Por propiedad: $(x - a + b + x + a - b)(x - a + b - x - a + b) = 0$

$$(2x)(2b - 2a) = 0$$

Por teorema:

$$\therefore x = 0 \vee a = b$$

Rpta.: C

Resolución 66: Según la teoría:

I. $|x| = \max(x; -x)$ (V)

II. Siempre para $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \sqrt{x^2}$ (V)

III. Si $|x| \leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0$; entonces $x = 0$ (V)

Rpta.: E

Resolución 67: En cada afirmación:

I. $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow a - \frac{\varepsilon}{2} < x < a + \frac{\varepsilon}{2}$

$|x - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow b - \frac{\varepsilon}{2} < x < b + \frac{\varepsilon}{2}$

Fácilmente reconocemos que no necesariamente $a = b$ (F)

II. Como $x \leq z \leq y \Leftrightarrow x - L \leq z - L \leq y - L$

Luego: si $|x - L| < \varepsilon \wedge |y - L| < \varepsilon \Rightarrow |z - L| < \varepsilon$ (V)

III. Por teorema:

si $ab > 0 \wedge |a| \geq |b| \Rightarrow |a - b| = |a| - |b|$ (V)

Rpta.: B

Resolución 68: La ecuación propuesta es:

$$|1-x| = x-1 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \wedge (1-x = x-1 \vee 1-x = 1-x) \\ x \geq 1 \wedge (x=0 \vee x \in \mathbb{R}) \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{x \geq 1}$$

$$\therefore A = [1; \infty)$$

Rpta.: A

Resolución 69: En cada afirmación

I. $\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \geq \frac{9}{|a|+|b|+|c|}$ (V)

$$* \text{ MA} \geq \text{MH} \Leftrightarrow \frac{|a|+|b|+|c|}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|}}$$

De donde tenemos:

$$\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \geq \frac{9}{|a|+|b|+|c|}$$

II. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(|a|+|b|)^2}$ (V)

$$* \text{ MP} \geq \text{MH} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{|a|}\right)^2 + \left(\frac{1}{|b|}\right)^2}{2}} \geq \frac{2}{|a|+|b|}$$

$$\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{2} \geq \frac{4}{(|a|+|b|)^2}$$

De donde tenemos:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(|a|+|b|)^2}$$

III. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2|abcd|$ (F)

Por teorema: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4|abcd| ; \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Rpta.: B

Resolución 70:

Se tiene:

$$\left| \frac{x+1}{x-2} - x + 2 \right| = x$$

Observa que $x > 0$; luego:

$$\left| \frac{x+1-x+2}{x-2} \right| = x$$

$$\left| \frac{3}{x-2} \right| = x$$

$$|x-2| = \frac{3}{x}$$

Ahora se cumple que:

$$x-2 = \frac{3}{x} \vee x-2 = -\frac{3}{x}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \vee \underbrace{x^2 - 2x + 3 = 0}_{x \notin \mathbb{R}}$$

Solo con la ecuación:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -1$$

Recordemos que $x > 0$:

$$x = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 10$$

$$\therefore \Sigma \text{ de cifras} = 1$$

Rpta.: A**Resolución 71:**

$$|x-a| + b = |x+a| - b$$

Condición $a > b > 0$, por zonas:

$$\text{I. } -\infty < x < -a: \quad |x-a| + b = |x+a| - b$$

$$-x + a + b = -x - a - b$$

$$2(a+b) = 0$$

$$a+b=0 \quad \text{iAbsurdo!}$$

$$\Rightarrow \text{CS(I)} = \emptyset$$

$$\text{II. } -a \leq x < a: \quad |x - a| + b = |x + a| - b$$

$$-x + a + b = x + a - b$$

$$-2x = -2b$$

$$x = b$$

$$\Rightarrow \text{CS(II)} = \{b\}$$

$$\text{III. } a \leq x < \infty: \quad |x - a| + b = |x + a| - b$$

$$x - a + b = x + a - b$$

$$a = b \quad \text{¡Absurdo!}$$

$$\Rightarrow \text{CS(III)} = \emptyset$$

Finalmente tenemos:

$$\therefore \text{CS} = S = \{b\}$$

Rpta.: C

Resolución 72: En cada proposición:

$$\text{I. Se tiene: } -|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

$$\text{Sumando: } -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$\Rightarrow$ La proposición es verdadera (V).

II. Cauchy - Schwarz:

$$(1 \cdot a + 1 \cdot b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 \leq 2$$

De donde obtenemos:

$$|a + b| \leq \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ La proposición es verdadera (V).

III. Es evidente que:

$$\min \{2a, 2b\} = a + b - |a - b|$$

$\Rightarrow$ La proposición es verdadera (V).

Rpta.: B

Resolución 73: Observa que $x \neq \pm 1$:

$$\frac{|x-1|-|x|}{1-|x|} \geq 0$$

Multiplicando a cada miembro por $\frac{|x-1|+|x|}{1+|x|}$; tenemos:

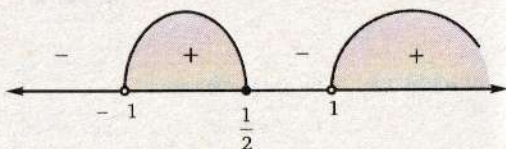
$$\frac{|x-1|^2 - |x|^2}{1-|x|^2} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 - x^2}{1-x^2} \geq 0$$

$$\frac{(2x-1)(-1)}{(1+x)(1-x)} \geq 0$$

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

En la recta real:



$$\therefore CS = \left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (1; \infty)$$

Rpta.: C

Resolución 74: En cada conjunto:

$$A) |2x-3| > 1-x \Leftrightarrow 2x-3 > 1-x \vee 2x-3 < x-1$$

$$x > \frac{4}{3} \vee x < 2$$

$$\Rightarrow A = \mathbb{R}$$

$$B) |3x-2| < 2-x \Leftrightarrow 2-x > 0 \wedge x-2 < 3x-2 < 2-x$$

$$x-2 < 0 \wedge (3x-2 > x-2 \wedge 3x-2 < 2-x)$$

$$x-2 < 0 \wedge (x > 0 \wedge x < 1)$$

$$x < 2 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow B = (0; 1)$$

Se pide:

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x \in (A - B) \rightarrow x \in B\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x \in \langle -\infty; 0 \rangle \cup [1; \infty) \rightarrow x \in \langle 0; 1 \rangle\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x \in \langle 0; 1 \rangle \vee x \in \langle 0; 1 \rangle\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x \in \langle 0; 1 \rangle\}$$

$$\therefore C = \langle 0; 1 \rangle$$

Rpta.: D

Resolución 75: $|x - 2| \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$$|2x - 4| \leq x$$

$$x > 0 \wedge -x \leq 2x - 4 \leq x$$

$$x > 0 \wedge (2x - 4 \geq -x \wedge 2x - 4 \leq x)$$

$$x > 0 \wedge \left(x \geq \frac{4}{3} \wedge x \leq 4 \right)$$

$$x > 0 \wedge \frac{4}{3} \leq x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 4$$

$$\therefore CS = \left[\frac{4}{3}; 4 \right]$$

Rpta.: A**Resolución 76:** Condición:

$$0 < b < a$$

En la inecuación:

$$|ax + b| < |bx + a|$$

$$(ax + b + bx + a)(ax + b - bx - a) < 0$$

$$[(a + b)x + (a + b)][(a - b)x - (a - b)] < 0$$

$$(a + b)(a - b)(x + 1)(x - 1) < 0$$

$$(a^2 - b^2)(x + 1)(x - 1) < 0 \quad \dots\dots\dots (*)$$

Como $0 < b < a \Rightarrow 0 < b^2 < a^2$; es evidente que:

$$a^2 - b^2 > 0$$

Ahora en (*):

$$(x + 1)(x - 1) < 0$$

$$-1 < x < 1$$

$$\therefore CS = \langle -1; 1 \rangle$$

Rpta.: C

Resolución 77: Una rápida inspección permite observar que el denominador es positivo, luego tenemos:

$$|x^2 - 2x| + 4 \leq x^2 + |x + 2|$$

$$|x||x - 2| + 4 \leq x^2 + |x + 2|$$

I. $-\infty < x < -2$: $|x||x - 2| + 4 \leq x^2 + |x + 2|$

$$(-x)(-x + 2) + 4 \leq x^2 - (x + 2)$$

$$x^2 - 2x + 4 \leq x^2 - x - 2$$

$$-x \leq -6$$

$$x \geq 6$$

Es evidente que: $CS(I) = \emptyset$

II. $-2 \leq x < 0$: $|x||x - 2| + 4 \leq x^2 + |x + 2|$

$$(-x)(-x + 2) + 4 \leq x^2 + x + 2$$

$$x^2 - 2x + 4 \leq x^2 + x + 2$$

$$-3x \leq -2$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

Es evidente que: $CS(II) = \emptyset$

III. $0 \leq x < 2$: $|x||x - 2| + 4 \leq x^2 + |x + 2|$

$$x(-x + 2) + 4 \leq x^2 + x + 2$$

$$-2x^2 + x + 2 \leq 0$$

$$2x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \quad \vee \quad x \geq \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

Es evidente que: $CS(III) = \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{4}; 2 \right)$

IV. $2 \leq x < \infty$: $|x||x - 2| + 4 \leq x^2 + |x + 2|$

$$x(x - 2) + 4 \leq x^2 + x + 2$$

$$x^2 - 2x + 4 \leq x^2 + x + 2$$

$$-3x \leq -2$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

Es evidente que: $CS(IV) = [2; \infty)$

Finalmente tenemos: $S = CS(I) \cup CS(II) \cup CS(III) \cup CS(IV)$

$$\therefore S = \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{4}; \infty \right)$$

Resolución 78: Observa que:

$$x = T^2 + 3T$$

$$x = \left(T + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Por condición:

$$T \in (0; 1) \Leftrightarrow 0 < T < 1$$

$$\frac{3}{2} < T + \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$$

$$\frac{9}{4} < \left(T + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$$

$$0 < \left(T + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} < 4$$

En verdad tenemos: $0 < x < 4$

Ahora reconocemos que:

$$m = 0 \wedge M = 4$$

$$\therefore m + M = 4$$

Rpta.: D**Resolución 79:** La ecuación es:

$$x^2 + 2mx + (m^2 - 1) = 0$$

$$x^2 + 2mx + (m+1)(m-1) = 0$$

$$[x + (m+1)][x + (m-1)] = 0$$

$$x_1 = -(m+1); x_2 = -(m-1)$$

$$\text{I. Si } x_1 > -1 \wedge x_2 < 2$$

$$-(m+1) > -1 \wedge -(m-1) < 2$$

$$m+1 < 1 \wedge m-1 > -2$$

$$m < 0 \wedge m > -1 \Leftrightarrow -1 < m < 0$$

$$\text{II. Si } x_1 < 2 \wedge x_2 > -1$$

$$-(m+1) < 2 \wedge -(m-1) > -1$$

$$m+1 > -2 \wedge m-1 < 1$$

$$m > -3 \wedge m < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 2$$

Fácilmente reconocemos que el menor intervalo se encuentra en el caso I.

Como:

$$m \in (-1; 0)$$

$$\therefore b - a = 1$$

Rpta.: A

Resolución 80: En cada conjunto:

$$A) (x-2)^2[(x-2)^2-2]-15 > 0$$

$$(x-2)^4 - 2(x-2)^2 - 15 > 0$$

$$[(x-2)^2-5][(x-2)^2+3] > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ahora solo con: } (x-2)^2-5 > 0$$

$$(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5}) > 0 \Leftrightarrow x < 2-\sqrt{5} \vee x > 2+\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow A = \langle -\infty; 2-\sqrt{5} \rangle \cup \langle 2+\sqrt{5}; \infty \rangle$$

$$B) x^2 > 4(x-1) \wedge x^2 \leq 20$$

$$x^2 - 4x + 4 > 0 \wedge x^2 - 20 \leq 0$$

$$(x-2)^2 > 0 \wedge (x+2\sqrt{5})(x-2\sqrt{5}) \leq 0$$

$$x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad -2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow B = [-2\sqrt{5}; 2] \cup [2; 2\sqrt{5}]$$

Observa que:

$$A \cap B = [-2\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}) \cup (2+\sqrt{5}; 2\sqrt{5}]$$

$$(A \cap B) \cap \mathbb{Z} = \{-4; -3; -2; -1\}$$

$$\therefore \text{Cardinal} = 4$$

Rpta.: C**Resolución 81:** Se tiene:

$$-6 < \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-6x^2 + 6x - 6 < 2x^2 + mx - 4 < 4x^2 - 4x + 4$$

$$2x^2 + mx - 4 > -6x^2 + 5x - 6 \wedge 4x^2 - 4x + 4 > 2x^2 + mx - 4$$

$$8x^2 + (m-6)x + 2 > 0 \wedge 2x^2 - (m+4)x + 8 > 0$$

Por trinomio positivo:

$$(m-6)^2 - 4(8)(2) < 0 \wedge [-(m+4)]^2 - 4(2)(8) < 0$$

$$(m-6)^2 - 8^2 < 0 \wedge (m+4)^2 - 8^2 < 0$$

$$(m+2)(m-14) < 0 \wedge (m+12)(m-4) < 0$$

$$-2 < m < 14 \wedge -12 < m < 4$$

$$\underbrace{-2 < m < 4}$$

$$\therefore m \in \langle -2; 4 \rangle$$

Rpta.: B

Resolución 82: Por condición $-\frac{2}{5}$ y 3 son las raíces del trinomio:

$$(K^2 + 1)x^2 + (1 - 3K^2)x - (K^2 + 3)$$

Por propiedad: $-\frac{1-3K^2}{K^2+1} = -\frac{2}{5} + 3 \quad \wedge \quad \frac{-(K^2+3)}{K^2+1} = -\frac{2}{5} \cdot 3$

$$\frac{3K^2-1}{K^2+1} = \frac{13}{5} \quad \wedge \quad \frac{K^2+3}{K^2+1} = \frac{6}{5}$$

$$15K^2 - 5 = 13K^2 + 13 \quad \wedge \quad 5K^2 + 15 = 6K^2 + 6$$

$$K^2 = 9 \quad \wedge \quad K^2 = 9$$

$$K^2 = 9$$

$$K = 3 \quad \vee \quad K = -3$$

$\therefore$ Producto de valores = -9

Rpta.: D

Resolución 83:

$$x + y = 12; \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

Se plantea:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$$\sqrt{xy} \leq 6$$

$$xy \leq 36$$

$\therefore$ Mayor valor de $xy = 36$

Rpta.: C

Resolución 84:

La ecuación es:

$$x^4 + (1-m)x^2 + 2(m-3) = 0$$

$$[x^2 - (m-3)][x^2 - 2] = 0$$

Es evidente que las raíces reales son:

$$x = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad x = -\sqrt{2}$$

Por condición:

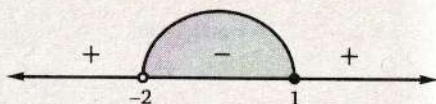
$$x^2 = m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$$

$\therefore m \in (-\infty; 3)$

Rpta.: D

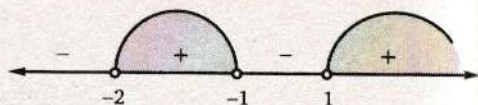
Resolución 85: En cada proposición:

I. $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$



$$\Rightarrow CS = \langle -2; -1 \rangle \quad \dots\dots\dots(V)$$

II. $\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)} > 0$



$$\Rightarrow CS = \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle \quad \dots\dots\dots(F)$$

III. $\frac{x^2+x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow x-3 < 0$

$$x < 3$$

$$\Rightarrow CS = \langle -\infty; 3 \rangle \quad \dots\dots\dots(V)$$

Rpta.: E**Resolución 86:** La inecuación dada es:

$$\frac{ax+1}{bx+1} \geq \frac{x+a}{x+b}; a < 0 < b < 1$$

$$\frac{ax+1}{bx+1} - \frac{x+a}{x+b} \geq 0$$

$$\frac{ax^2 + (ab+1)x + b - [bx^2 + (ab+1)x + a]}{(bx+1)(x+b)} \geq 0$$

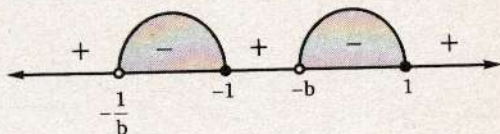
$$\frac{(a-b)x^2 - (a-b)}{(bx+1)(x+b)} \geq 0$$

$$\frac{(a-b)(x+1)(x-1)}{(bx+1)(x+b)} \geq 0$$

Como $a < b$; entonces $a - b < 0$:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(bx+1)(x+b)} \leq 0$$

Finalmente en la recta real:



$$\therefore CS = \left(-\frac{1}{b}; -1\right] \cup \left(-b; 1\right]$$

Rpta.: C

Resolución 87: Fácilmente podemos reconocer que:

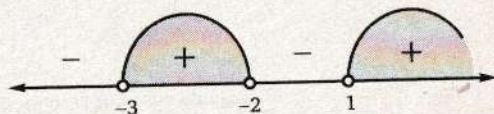
I. $x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II. $x^2 - x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ahora la inecuación se reduce a:

$$\frac{x-5}{(x+2)(x-1)(x+3)(x-5)} > 0$$

Simplificando: $(x+2)(x-1)(x+3) > 0; \quad x \neq 5$



Como $x \neq 5$: $CS = \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 1; 5 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$

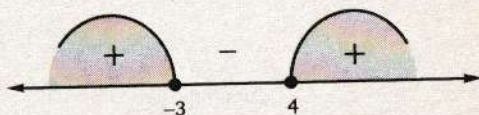
Reconocemos que: $a = -3; b = -2; c = 1; d = 5; e = 5$

$\therefore a + b + c + d + e = 6$

Rpta.: B

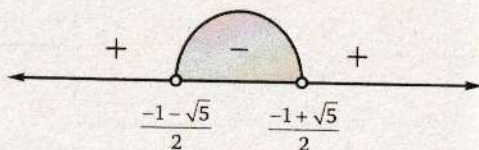
Resolución 88: Hallemos cada conjunto solución:

• $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) \geq 0$



$\Rightarrow S_1 = \langle -\infty; -3 \rangle \cup [4; \infty)$

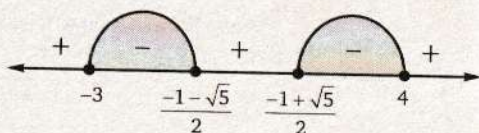
$$\bullet \quad x^2 + x - 1 \leq 0$$



$$\Rightarrow S_2 = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$\bullet \quad (x^2 - x - 12)(x^2 + x - 1) \leq 0$$

$$(x-4)(x+3) \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \leq 0$$



$$\Rightarrow S = \left[-3; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 4 \right]$$

Ahora podemos afirmar que:

- I. Falso
- II. Verdadero
- III. Falso

Rpta.: C

Resolución 89: Fácilmente podemos reconocer que $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{7}$ son las raíces de la inecuación:

$$(3m^2 - m)x^2 + (2m - 9)x + 2m^2 - 5 < 0$$

Por propiedad: $\frac{2m-9}{3m^2-9} = -\frac{13}{14} \wedge \frac{2m^2-5}{3m^2-m} = \frac{3}{14}$

$$39m^2 + 15m - 126 = 0 \wedge 19m^2 + 3m - 70 = 0$$

$$(13m - 21)(m + 2) = 0 \wedge (19m - 35)(m + 2) = 0$$

En forma simultánea:

$$m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

Finalmente tenemos que:

$$m^2 - 4m + 8 = 4 + 8 + 8$$

$$\therefore m^2 - 4m + 8 = 20$$

Rpta.: D

Resolución 90: Observa que:

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \text{ luego se cumple que:}$$

$$(a + 1)x^2 + ax + a > 3x^2 + 3x + 3; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(a - 2)x^2 + (a - 3)x + (a - 3) > 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por propiedad:

$$a - 2 > 0 \wedge (a - 3)^2 - 4(a - 2)(a - 3) < 0$$

$$a - 2 > 0 \wedge (a - 3)[(a - 3) - 4(a - 2)] < 0$$

$$a - 2 > 0 \wedge (a - 3)(3a - 5) > 0$$

$$(a > 2) \wedge \left(a < \frac{5}{3} \vee a > 3 \right)$$

$$\text{En la intersección: } a > 3 \Rightarrow A = \langle 3; \infty \rangle$$

$$\therefore A^c = \langle -\infty; 3 \rangle$$

Rpta.: E

Resolución 91: Observa que:

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \text{ luego se cumple que:}$$

$$-3x^2 - 3x - 3 < x^2 - (a + 5)x + 1 < 3x^2 + 3x + 3; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - (a + 5)x + 1 > -3x^2 - 3x - 3 \wedge$$

$$3x^2 + 3x + 3 > x^2 - (a + 5)x + 1$$

$$4x^2 - (a + 2)x + 4 > 0 \vee 2x^2 + (a + 8)x + 2 > 0$$

Por propiedad: $[-(a+2)]^2 - 4(4)(4) < 0 \wedge (a+8)^2 - 4(2)(2) < 0$

$$(a+2)^2 - 8^2 < 0 \wedge (a+8)^2 - 4^2 < 0$$

$$(a+10)(a-6) < 0 \wedge (a+12)(a+4) < 0$$

$$(-10 < a < 6) \wedge (-12 < a < -4)$$

En la intersección: $-10 < a < -4$

$$\therefore \text{Intervalo} = \langle -10; -4 \rangle$$

Rpta.: C

Resolución 92: Se tiene: $\sqrt{2-x} \leq |x|$

Equivalente: $2-x \geq 0 \wedge 2-x \leq |x|^2$

$$x-2 \leq 0 \wedge 2-x \leq x^2$$

$$x-2 \leq 0 \wedge x^2+x-2 \geq 0$$

$$x-2 \geq 0 \wedge (x+2)(x-1) \geq 0$$

$$(x \leq 2) \wedge (x \leq -2 \vee x \geq 1)$$

En la intersección: $x \leq -2 \vee 1 \leq x \leq 2$

$$\therefore \text{CS} = \langle -\infty; -2 \rangle \cup [1; 2]$$

Rpta.: E

Resolución 93: Por condición de existencia:

$$x \geq 0 \wedge 1-x \geq 0$$

$$x \geq 0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad \dots\dots(I)$$

La inecuación dada es:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$1 + 2\sqrt{x-x^2} \geq 2$$

$$2\sqrt{x-x^2} \geq 1$$

$$4x - 4x^2 \geq 1$$

$$-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

$$(2x - 1)^2 \leq 0$$

De donde necesariamente:

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots(\text{II})$$

De (I) y (II) tenemos:

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Rpta.: C

Resolución 94:

Por condición de existencia:

$$1 - x \geq 0 \Rightarrow x - 1 \leq 0$$

$$x \leq 1 \quad \dots\dots\dots(\text{I})$$

La inecuación dada elevamos al cubo:

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 2 + \sqrt{1-x} < x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\sqrt{1-x} < 3 - 3x$$

$$\sqrt{1-x} < 3(1-x)$$

$$1-x < 9(1-x)^2$$

$$9(1-x)^2 - (1-x) > 0$$

$$9(x-1)^2 + (x-1) > 0$$

$$(x-1)(9x-8) > 0$$

$$x < \frac{8}{9} \vee x > 1 \quad \dots\dots\dots(\text{II})$$

De (I) y (II) tenemos:

$$x < \frac{8}{9}$$

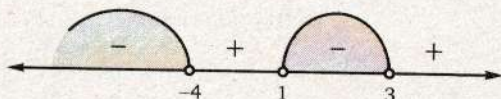
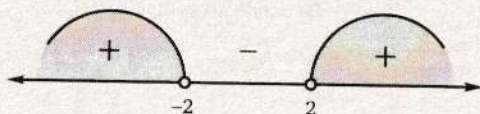
$$\therefore S = \left\langle -\infty; \frac{8}{9} \right\rangle$$

Rpta.: B

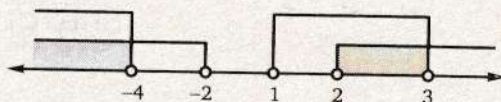
Resolución 95: La inecuación equivalente del sistema:

$$x^2 - 4 > 0 \wedge \frac{x+4}{x^2 - 4x + 3} < 0$$

$$(x+2)(x-2) > 0 \wedge \frac{(x+4)}{(x-1)(x-3)} < 0$$



En la intersección:



$$\therefore S = (-\infty; -4) \cup (-2; 3)$$

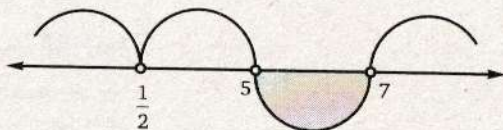
Rpta.: B

Resolución 96: Observa que:

$$x^2 - x + 20 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

Luego tenemos:

$$(2x-1)^2(x-7)^3(x-5)^{17} < 0$$



$$\Rightarrow CS = (5; 7)$$

$$\therefore a + b = 12$$

Rpta.: D

Resolución 97: Sea:

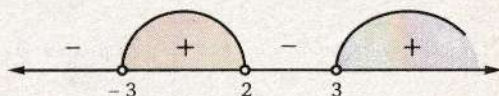
$$f(x) = x^{10} - x^7 + x^4 - x^3 + 1$$

$$f(-x) = x^{10} + x^7 + x^4 + x^3 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) si } x=0 \Rightarrow f(x) > 0 \\ \text{ii) si } x < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \\ \text{iii) si } 0 < x < 1 \Rightarrow f(x) > 0 \\ \text{iv) si } x=1 \Rightarrow f(x) > 0 \\ \text{v) si } x > 1 \Rightarrow f(x) > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Rpta.: E**Resolución 98:** Reescribiendo la inecuación:

$$\frac{x-3}{(x+3)(x+2)} > 0; x \neq 2$$



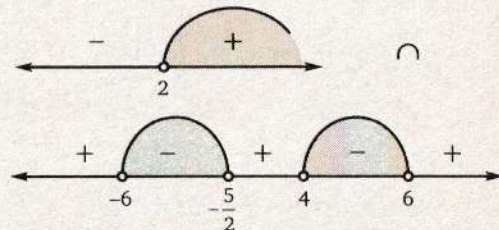
$$\Rightarrow S = \{-3; -2\} \cup \{3; \infty\}$$

$$\therefore a + b + c = -2$$

Rpta.: A**Resolución 99:** La inecuación equivale al sistema:

$$4x - 8 > 0 \wedge \frac{(x+6)^{11}(x-6)^{11}\sqrt{x-4}}{(x-5)^2(2x+5)} < 0$$

$$x > 2 \wedge \frac{(x+6)(x-6)(x-4)}{2x+5} < 0; x \neq 5$$

En la intersección: $4 < x < 6$ Pero recuerda que $x \neq 5$:

$$CS = \langle 4; 6 \rangle - \{5\}$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

Rpta.: D

Resolución 100: En la ecuación:

$$\frac{\sqrt{2-|x|}(1-x^2)}{(x+3+x-1)(|x|-2)} \geq 0$$

$$\bullet \quad 2 - |x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 2$$

$$-2 < x < 2 \quad \dots\dots\dots(I)$$

$$\bullet \quad \text{Si } -2 < x < 2 \Rightarrow 1 < x+3 < 5$$

$$|x| - 2 < 0$$

Ahora tenemos:

$$\frac{1-x^2}{x+3+x-1} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{2x+2} \geq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)} \geq 0$$

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1 \quad \dots\dots\dots(II)$$

De (I) y (II) tenemos:

$$1 \leq x < 2$$

Por condición:

$$x \in (2; 6)$$

$$\therefore A = \emptyset$$

Rpta.: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la suma de los enteros
- N
- , tal que:

$$N = \frac{3x-5}{x-2}; \text{ si } x \in (-2; 1]$$

- A) 4 B) 2 C) 0
D) 1 E) 6

2. Dado el conjunto:

$$M = \{x \in \mathbb{Z} / |x^2 - 3x - 1| < 3\}$$

Determine su cardinal

- A) 1 B) 5 C) 3
D) 2 E) 4

3. Resolver:
- $|x^2 + 2x| > 8$

- A) $x \in (-3; 4)$ B) $x \in \mathbb{R} - [-2; 4]$
C) $x \in (-4; 3)$
D) $x \in (8; +\infty)$ E) $x \in \mathbb{R} - [-4; 2]$

4. Sabiendo que:
- $a; b \in \mathbb{R}$
- ; y además:

$$a^2 - 4a + b^2 = 2b - 5$$

Hallar: $E = a^3 + b^2$

- A) 9 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

5. Si:
- $a \in (3; 4)$
- ; indicar el equivalente de:

$$R = |a - 2| + |a - 4|$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

6. Al resolver:

$$(2x^2 + 1)(x^2 + 5x + 1) > 0$$

Se obtiene como solución:

$$x \in \mathbb{R} - [m; n]$$

Calcular: $m \cdot n$

- A) 1 B) -3 C) -4
D) -1 E) 0

7. "A" es el conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt{|3x-1| - |2x| - |x-1|} + 2x \geq 1$$

Entonces, el conjunto "A" es:

- A) $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ B) $[1; \infty)$ C) $(-\infty; 1]$
D) $(-\infty; 1)$ E) $(-\infty; 0]$

8. Sea:
- $\sqrt[6]{x+7}(x-5) \geq 0$

¿Entre qué valores está: $\frac{x+1}{x}$?

- A) $\left\langle \frac{3}{5}; \frac{7}{5} \right]$ B) $\left\langle 0; \frac{6}{5} \right]$ C) $\left\langle -\infty; \frac{6}{5} \right]$
D) $\left\langle 1; \frac{2}{5} \right]$ E) $\left\langle 1; \frac{6}{5} \right]$

9. Determinar por extensión; el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x + 2 < 2x - 10\}$$

- A) $\{-1; 0; 1\}$ B) $\{-1; 0\}$
C) $[-2; 3]$
D) $\{\}$ E) $\{0; 1\}$

10. Resolver:

$$|x^2 - 2|^2 \leq 3|x^2 - 2| + 4$$

A) $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ B) $x \in [0; \sqrt{6}]$

C) $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

D) $x \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$ E) $x \in [0; \sqrt{3}]$

11. Si: $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, hallar el máximo valor de "a" en:

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + w^4}{xyzw} \geq a$$

A) 1 B) 2 C) 4

D) $\sqrt{2}$ E) 8

12. Indicar la suma de cifras del menor valor de "n", de modo que, para todo "x" real se verifique:

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-11| \geq 2004$$

A) 8 B) 9 C) 10

D) 11 E) 12

13. Si: $m, n, p \in \mathbb{R}^+$, y además:

$$K = \frac{m^2 + n^2}{mn} + \frac{n^2 + p^2}{np} + \frac{m^2 + p^2}{mp}$$

Luego, es posible afirmar que:

A) $K \geq 6$ B) $K \geq \frac{1}{2}$ C) $K \geq 12$

D) $K \geq \frac{4}{3}$ E) $K \geq 3$

14. ¿Para qué valores de "n" se satisface la desigualdad:

$$-3 < \frac{x^2 + nx - 2}{x^2 - x + 1} < 2; \forall x \in \mathbb{R}?$$

A) $n \in (-1; 3)$ B) $n \in (-1; 5)$

C) $n \in (-1; 7)$

D) $n \in (-1; 2)$ E) $n \in (1; 6)$

15. Si "x" satisface: $x^2 - 3x - 18 \leq 0$, dar el conjunto de valores que puede asumir "λ", si: $\lambda = x^2 - 3x - 18$

A) $(-\infty; 0]$ B) $(0; 1]$ C) $\left(-\frac{81}{4}; 0\right]$

D) $\mathbb{R}$ E) $\left[-\frac{81}{4}; 0\right]$

16. Si: "S" es el conjunto solución de la desigualdad:

$$\frac{x^{13}(x+3)^{16}(x-5)^{30}}{(x^3-27)(4x+16)} \geq 0$$

entonces, es verdad que:

A) $[-4; 0] \subset S$

B) $[3; +\infty) \subset S$

C) $S = (-4; 0] \cup (3; +\infty)$

D) $[0; 3) \cap S = \emptyset$

E) $\{-3\} \subset S$

17. Resolver: $\frac{|x|}{|x^2 - 16|} < \frac{x}{|x| - 4}$

A) $x \in (0; 4)$

B) $x \in (4; +\infty)$

C) $x \in (0; 4) \cup (4; +\infty)$

D) $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

E) $x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$

18. Al resolver: $\frac{|\sqrt{x-2}-6|-\sqrt{x-2}}{|x^2-9|} \geq 0$,
se obtiene un conjunto solución de la
forma: $[a; b) \cup \langle c; d]$.

Dar como respuesta: $\frac{(a+d)}{(b+c)}$

- A) $\frac{11}{5}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{10}{3}$
D) $\frac{13}{6}$ E) $\frac{12}{7}$

19. Si: $x \in \mathbb{R}^+$; hallar el mínimo valor de:

$$S = \frac{x}{7} + \frac{175}{x}$$

- A) $\sqrt{10}$ B) 5 C) $2\sqrt{5}$
D) 10 E) $5\sqrt{2}$

20. Indicar el menor número "n" entero
que permita que:

$$(\sqrt{3}+2+x)(\sqrt{3}-2-x) < n$$

se verifique para todo "x" real.

- A) 4 B) 2 C) 3
D) 6 E) 10

21. Sean: $a; b \in \mathbb{R} / ab > 1$; el menor valor:

$$E = \frac{a^2 + ab + b^2}{\sqrt{ab} - 1}; \text{ es:}$$

- A) 2 B) 3 C) 6
D) 8 E) 9

22. Al resolver: $x^2 + x + |x| + 1 \leq 0$;
podemos afirmar:

- A) $x = \{-1\}$ B) $x = \{0; 1\}$ C) $x > 0$
D) $x < 0$ E) $x \in \emptyset$

23. Si: $|x| < 3$; entonces:

$$\frac{1}{a+6} < \left| \frac{1}{4-x} \right| < a$$

luego de "a"; se puede afirmar:

- A) $a < 1$ B) $a < \frac{1}{2}$ C) $a \leq 1$
D) $a \geq 1$ E) $a \leq \frac{1}{4}$

24. Determinar el valor de verdad de las
proposiciones:

I. Si: $x \in \langle -1; 5 \rangle \Rightarrow \frac{3}{2x+5} \in \langle 0; 1 \rangle$

II. Si: $x \in [0; 4) \Rightarrow \sqrt{\frac{16-x}{x+2}} - \sqrt{x+1} > 0$

III. Si: $\frac{x-1}{x+3} > x \Rightarrow x < -3$

- A) FVV B) FVF C) FFV
D) FFF E) VVV

25. Para: $a > 0$ y $b > 0$. ¿Cuál de las
siguientes expresiones es verdadera?

A) $\sqrt{ab} < \frac{2ab}{a+b}$ B) $\sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

C) $\sqrt{ab} - a = \frac{2ab}{a+b}$

D) $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ E) $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

26. Si: $-10 < a < -5$; $-2 < b < -1$; $2 < c < 5$,
entonces $\frac{ab}{c}$ está comprendido entre:

- A) $-10y-1$ B) $-10y1$ C) $2y10$
D) $2y20$ E) $0y10$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 09

27. Sean: p y q , reales positivos. Encontrar el menor valor de la expresión:

$$A = \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) 2

28. Sean: $a; b \in \mathbb{R}$, tales que: $|x - a| < 2b$ entonces los números p y q , para los cuales se tiene: $\frac{b}{x - a + 3b} \in (p; q)$; son respectivamente:

- A) $\frac{1}{5}; 1$ B) $\frac{1}{5}; \frac{3}{5}$ C) $-1; 1$
D) $0; 1$ E) $-1; \frac{1}{5}$

29. Sea la inecuación:

$$\frac{a^{2x-1} \cdot a^{5-x}}{a^{5x}} < \frac{(a^{2x-1})^x}{a^{4x+2}}$$

con: $0 < a < 1$. Entonces, el menor valor entero que satisface la inecuación es $x = ??$

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

30. La medida de los lados de un triángulo están en progresión geométrica de razón " r "; luego, lo verdadero es:

- A) $1 < r$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < 1$
C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r$ E) $0 < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

31. Dados los conjuntos de números reales:

$$S = \{p \in \mathbb{R} / 2p + 3 < 6 - p\}$$

$$T = \{p \in \mathbb{R} / |ap + b| < |a + b - ap|; -2b < a < 0\}$$

entonces: $S \cap T$; es:

- A) $\mathbb{R}$ B) $\langle 0; 1 \rangle$ C) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$
D) $\langle -\infty; 1 \rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$

32. Hallar el valor de $E = \frac{x-y}{z}$; si:

x, y, z son enteros positivos que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$2x + 3y + 5z > 23$$

$$2x - y + 5z < 13$$

$$y - z > 1$$

$$y < 4$$

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0
D) 1 E) 2

33. Hallar el valor de: $P = |x - y|$. Donde:

x, y son números enteros positivos que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$5x - 3y > 2$$

$$2x + y < 11$$

$$y > 3$$

- A) -1 B) 7 C) 1
D) 8 E) 0

34. Un postulante desea resolver la desigualdad $\sqrt{-x} < 1$ para ello, realiza los siguientes pasos:

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{-x} < 1 \\
 \downarrow \text{ paso N}^\circ 1 \\
 (\sqrt{-x})^2 < 1 \\
 \downarrow \text{ paso N}^\circ 2 \\
 \sqrt{(-x)^2} < 1 \\
 \downarrow \text{ paso N}^\circ 3 \\
 \sqrt{x^2} < 1 \\
 \downarrow \text{ paso N}^\circ 4 \\
 x < 1
 \end{array}$$

Entonces; se puede afirmar que:

- A) El paso N° 1 es correcto
 B) El paso N° 2 es incorrecto
 C) El paso N° 3 es incorrecto
 D) El paso N° 4 es correcto
 E) Todos los pasos son correctos
35. Decir cuántas de las afirmaciones siguientes son falsas:
- I. Si: $a \leq b$; entonces: $a^2 \leq b^2$
 II. Si: $a^2 \leq b^2$; entonces: $a \leq b$
 III. Si: $\frac{1}{a+r} \leq \frac{1}{b+r}$; entonces: $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$
 IV. Si: $a < 3$; entonces: $a^2 < 9$
 V. Si: $a^3 \leq b^3$; entonces: $a \leq b$
- A) 1 es falsa B) 2 son falsas
 C) 3 son falsas
 D) 4 son falsas E) 5 son falsas

36. Sea: $x > 0$; calcular el mínimo valor de la expresión: $K = x + \frac{4}{x^2}$

A) $\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$
 D) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ E) 3

37. Sean: $a, b \in \mathbb{R}$; con $0 < a < b$. Entonces, el conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1+2b}{1+2a} < \frac{x+b}{x+a} < \frac{b}{a} \right\}$$

coincide con:

A) $\langle a; b \rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ C) $\langle a; 2b \rangle$
 D) $\langle 2a; 2b \rangle$ E) $\langle 0; 1 \rangle$

38. Considerar los 4 pasos para resolver la desigualdad:

$$\frac{1}{x+9} \leq \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}$$

Paso 1: $\sqrt{81-x^2} \leq x+9$

Paso 2: $81-x^2 \leq (x+9)^2$

Paso 3: Simplificando:

$$\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{315}{4} \geq 0$$

Paso 4: $x \in \mathbb{R}$; por lo tanto, la solución es todo $\mathbb{R}$.

Entonces, se puede decir que:

- A) Todos los pasos son correctos.
 B) El primer error se comete en el paso 1
 C) El primer error se comete en el paso 2
 D) El primer error se comete en el paso 3
 E) El único error se comete en el paso 4

39. El conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} \geq 0 \right\}; \text{ es:}$$

- A) $[-2; -1) \cup (1; +\infty)$
 B) $[-2; -1)$
 C) $(-\infty; -2] \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$
 D) $(-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$
 E) $(-\infty; -2] \cup (1; +\infty)$

40. Si:
- $|x| = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$
- ;
- y
-
- $|y| = 3\sqrt{6} + \sqrt{27}$

entonces:

- A) $x + |y| < 0$ B) $-|y| < x$
 C) $|x| - |y| > 0$
 D) $|y| \leq x$ E) $|y| - |x| < 1$

41. Hallar la suma de los valores enteros, que no asume la expresión:

$$E = \frac{x+5}{2} + \frac{2}{x-3} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

- A) 10 B) 12 C) 15
 D) 5 E) 7

42. ¿Para qué valores de "a" en la inecuación cuadrática siguiente, se cumple para todo
- $x \in \mathbb{R}$
- :

$$x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2?$$

- A) $a \in (-6; 2)$ B) $a \in (-10; -7)$
 C) $a \in (1; 3)$
 D) $a \in (-15; 10)$ E) $a \in (3; 6)$

43. ¿Cuántas de las proposiciones siguientes son verdaderas?

- I. Si: $\sqrt{x} > 1$; entonces: $x > 1$
 II. Si: $\sqrt{-x} > 1$; entonces: $x^2 > 1$
 III. Si: $x < -1$; entonces: $x^2 < 1$
 IV. Si: $x > 1$; entonces: $x^2 > 1$
 V. Si: $x^2 < 1$; entonces: $x < 1$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

44. Dada la expresión:

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{b}} = a + b;$$

determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. No existen números enteros que satisfagan la expresión.
 II. Si: $b \in (0; 1)$; entonces: $a < 0$
 III. Si: $b \neq 0$, entonces: $a = \frac{\sqrt{b}}{2b} - \frac{b}{2}$

- A) FVV B) FFV C) FFF
 D) VVV E) VFV

45. Sea la función:

$$F(x) = \left| \frac{3(3x+1)}{2(x+3)} + \frac{1}{2} \right|; x \in (0; 1)$$

entonces, el menor número "m"; tal que: $f(x) < m$; es:

- A) 2 B) 3 C) 1
 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

46. Sea: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < -1$; donde "a" y "b" son números reales. Entonces, dadas las proposiciones:

I. $(a+1)^2 > (b+1)^2$

II. $a^2 > b^3$

III. $a^3 - b^3 > 0$

son ciertas:

- A) I y II B) II y III C) I y III
D) I, II y III E) Sólo II

47. Indicar si son verdaderas o falsas; los siguientes enunciados:

- I. Si: $a \geq b > 0 \wedge c > d > 0$; entonces:

$$\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$$

- II. La suma de dos números irracionales puede ser un número racional.

- III. Existe al menos un número $p \in \mathbb{Z}^+$,

tal que: $P; P+2; P+4$, son primos.

- IV. No existen números primos "p" y "q" tales que $p^2 - 2q^2 = 1$

- A) FVVV B) VVFF C) VVVF
D) VFVV E) VVFF

48. Sean p; q; r tres números positivos diferentes, que cumplen: $pqr = 1$
Entonces, la suma: $s = p + q + r$ satisface

- A) $s > 0$ B) $3 \leq s < 4$ C) $0 < s < 3$
D) $s < 3$ E) $1 < s < 2$

49. El conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt{\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x - 4}} \geq x - 6$$

está contenido en:

- A) $[1; 4]$ B) $[4; 8]$ C) $\langle 4; 6 \rangle$
D) $[8; +\infty)$ E) $\langle -\infty; 4 \rangle$

50. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| < |x+1|\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / |x-4| + |x-2| < |x+3|\}$$

entonces: $A \cap B$ es igual a:

- A) $\langle 1; 9 \rangle$ B) $\langle 1; \infty \rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$
D) $\langle 1; \infty \rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{2}; 2 \right\rangle$

51. Determinar en qué conjunto de números negativos debe estar contenido "x", para que:

$$\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)} > 0$$

- A) $\langle -\sqrt{12}; -\sqrt{5} \rangle$ B) $\langle -\infty; -\sqrt{12} \rangle$
C) $\langle -12; 0 \rangle$
D) $\langle -\infty; -\sqrt{5} \rangle$ E) $\langle -\sqrt{5}; 0 \rangle$

52. El conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{\sqrt{2-|x|} \cdot (1-x^2)}{(|x+3|+x-1)(|x|-2)} \geq 0 \text{ es:}$$

- A) $\langle -2; 2 \rangle$ B) $[1; 2]$
C) $[-1; 1]$
D) $\langle -2; -1 \rangle$ E) $\langle -2; -1 \rangle \cup [1; 2]$

53. Hallar el intervalo formado por los valores de "x" que satisfacen la siguiente inecuación:

$$\frac{2x\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}(x-4)} > 1$$

- A) $(4; \infty)$ B) $(2; 4)$ C) $(2; \infty)$
D) $(0; \infty)$ E) $(-2; 4)$

54. Los valores enteros "x" e "y" son los lados de un rectángulo, si se cumple que:

$$a^2x + y < \frac{a}{a+1}$$

$$\frac{1}{a^2}x + y < 11 + \frac{1}{a+1}; \text{ para } a > 0;$$

Determine la mayor área de la región rectangular.

- A) $2u^2$ B) $3u^2$ C) $4u^2$
D) $5u^2$ E) $6u^2$

55. El valor máximo de la función:

$$f(x) = \frac{a^2 - x^2}{b^2 + x^2} \text{ en los reales; es:}$$

- A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b^2}{a^2}$ C) 0
D) $\frac{a^2}{b^2}$ E) No existe

56. Si: $\frac{(x-w)(x-z)}{(y-x)(y-z)} = \frac{x^2}{y^2}; x \neq y;$

se puede demostrar que:

- A) $x^{-1} + z^{-1} = y^{-1} + w^{-1}$
B) $x^{-1} + w^{-1} = y^{-1} + z^{-1}$
C) $x^{-1} - y^{-1} = z^{-1} + w^{-1}$
D) $(yz)^{-1} = z^{-1} + w^{-1}$
E) $z^{-1} + w^{-1} = y^{-1} + x^{-1}$

57. Sean: x; y; números reales; tales que: $|x| + |y| = 1$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

- A) $x^2 + y^2 \leq 1$ B) $x < y$
C) $y < x$
D) $y < 1 - x$ E) $2y < 1 - x$

58. Sea: $a < 0$ y $b > 0$. Determinar el menor valor de "K"; tal que:

$$\frac{(a+b)^3}{a^3 + b^3} \leq K; K \in \mathbb{Z}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

59. Dadas las desigualdades:

$$\sqrt[3]{x^2y^2 + 2(x-z)} < 0$$

$$(y-3)(1+|axy|) > 0; a < 0$$

luego; podemos afirmar que: "x-y" es:

- A) Menor que -2 B) Menor que 0
C) Menor que 2
D) Menor que -1 E) Menor que 1

60. Sea:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 + 8x^2 + 14x + 12}$$

$$\text{si: } f(x) \leq 0 \text{ para } x \leq a \text{}(\alpha)$$

$$f(1-x) \leq 0 \text{ para } b \leq x \text{}(\beta)$$

donde "a" es el mayor valor real y "b" es el menor valor real, que cumplen las condiciones (α) y (β) .

Calcular: $b - ab$.

- A) 4 B) 5 C) 3
D) 1 E) 0

61. Dadas las inecuaciones:

$$|x| + y < 1$$

$$x - y < 1$$

Hallar el conjunto de valores de "y" cuando "x" asume su mayor valor entero

- A) $(-\infty; 0)$ B) $(-1; 1)$
 C) $(-\infty; 1)$
 D) $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$ E) $(-\infty; 2) \cup (2; 4)$

62. Al graficar: $f(x) = x^2 - (K+1)x + (K+9)$, presenta intercepto en el semieje positivo de las abscisas; para ello "K" se encuentra en:

- A) $(-9; -1)$
 B) $[-5; 7]$
 C) $(-1; 7]$
 D) $[7; +\infty)$
 E) $(-\infty; -5] \cup [7; +\infty)$

63. De las siguientes proposiciones:

I. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}$

II. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \wedge x \neq 1 : x + \frac{1}{x} > 2$

III. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ :$

Si: $a + b + c = 12 \rightarrow abc \leq 64$

Indicar el valor de verdad de cada una.

- A) VFV B) VVV C) VFF
 D) FVF E) FFF

64. Resolver:

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$$

- A) $x < 0$ B) $x > 0$ C) $x \leq 0$
 D) $x > 4$ E) $x > \frac{2}{5}$

65. Hallar los límites entre los cuales debe estar comprendida "a", para que:

$$\frac{ax^2 - 7x + 5}{5x^2 - 7x + a}$$

pueda asumir todos los valores reales, para todo "x" real.

- A) $[-10; 4]$ B) $[-3; 3]$ C) $[-1; 3]$
 D) $[-12; 2]$ E) $[-14; 1]$

66. Si:
- $x \in \mathbb{R}$
- , hallar el valor máximo de:

$$\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$
 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

67. Luego de resolver:

$$x - \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 7x - 6} > 2;$$

indicar la suma de valores enteros de "x".

- A) 1 B) 2 C) -1
 D) -2 E) 0

68. Dado:
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- ; tal que:

$$x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0$$

Hallar el mínimo valor positivo de:

$$A = \frac{a+b+c}{b-a}$$

- A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3
 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

69. Sean: $a; b \in \mathbb{R}^+ / a \neq b \neq c \neq 1$ que verifican:

$$\frac{a^2 - bc}{a - 1} = \frac{b^2 - ca}{b - a} = \frac{c^2 - ab}{c - 1}$$

Calcular: $\frac{(MA)(MH)}{(MG)^3}$

- A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) $\frac{1}{2}$

70. Si: $a > b > 0; x > 0$ con relación a:

$$c = 1 + \frac{a - b}{b + x}$$

podemos afirmar que:

- A) $1 < c < \frac{a}{b}$ B) $b < c < a$
C) $\frac{a}{b} < c < 1$
D) $a < c - 1 < 1$ E) $a < c < b$

71. Sean: $a; b; c$; números no negativos, tales que: $a + b + c = 1$, hallar el máximo del producto: $P = a^5 b^3 c^2$

Indicar la suma de las cifras de $10^8 P$

- A) 12 B) 13 C) 14
D) 18 E) 20

72. Si: $a; b; c \in \mathbb{R}^+$, además:

$$K = \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

Luego:

- A) $K \leq 1$ B) $K \leq 2$ C) $K \geq 1$
D) $K \geq 9$ E) $K \leq 20$

73. Si: $a < m < b$; ¿Cuál (o cuáles) de las afirmaciones:

I. $m^2 - (a + b)m + ab < 0$

II. $\sqrt{a^2 - m^2} \notin \mathbb{R}$

III. $a^{-1} > b^{-1}$

son verdaderas?

- A) I B) II C) II $\wedge$ III
D) Todas E) Ninguna

74. Si: $a > 0$

$$P = (1 + a) - \sqrt{\frac{1}{4} + a}; \text{ luego:}$$

- A) $P > 1$ B) $P > \frac{1}{2}$ C) $P > 0$
D) $P > -\frac{1}{2}$ E) $P > 20$

75. Resolver:

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 6x - 8(x^2 - 5x)}}{x - 1} \geq 0$$

- A) $x \in \emptyset$ B) $x \in \mathbb{R}$ C) $x \in [2; 4]$
D) $x \in \{2; 4\}$ E) $x \in \{1; 7\}$

76. Resolver:

$$\sqrt[8]{\frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+4}}} \geq \frac{x-3}{x-7}$$

- A) $x \in [3; 4]$
B) $x \in [3; 4] \cup [5; 7]$
C) $x \in [3; 9]$
D) $x \in [3; 4] \cup [5; 7]$
E) $x \in \mathbb{R}$

77. Hallar $K \in \mathbb{R}$; de modo que la solución de la inecuación:

$$\frac{2x-1}{x+2} > K$$

sea $x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$

- A) 40 B) 20 C) 3
D) 4 E) 1

78. Sea "S" el conjunto solución de:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1-3x} > \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$$

entonces:

- A) $S \subset [-4; 1]$
B) $S = \langle -3; -1 \rangle \cup \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$
C) $S = [-5; 0]$
D) $S = \langle -3; -1 \rangle \cup \left\langle 0; \frac{1}{3} \right\rangle$
E) $S \subset \langle -2; 2 \rangle$

79. Indicar los valores de "x", que verifican la inecuación:

$$\left| \frac{abx + a^2 - b^2}{abx + a^2 + b^2} \right| < 1$$

siendo: $a^2 > b^2 \wedge a < b$.

- A) $\langle 1; 0 \rangle$ B) $\langle -\infty; a \rangle$
C) $\langle -\infty; -ab \rangle$
D) $\left\langle -\infty; -\frac{b}{a} \right\rangle$ E) $\left\langle -\infty; -\frac{a}{b} \right\rangle$

80. Si el conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2-1} - \sqrt{|x-1|} \geq 0 \right\}$$

entonces; el conjunto $\mathbb{R} - A$ está dado

por:

- A) $\emptyset$ B) $[-2; 2]$ C) $\langle -2; 2 \rangle$
D) $\langle -2; 1 \rangle$ E) $[-2; 1]$

81. Si $a > b > 1$. Resolver:

$$\frac{ax+1}{bx+1} \geq \frac{x+a}{x+b}$$

- A) $\langle -b; -1 \rangle$
B) $\left[-\frac{1}{b}; 1 \right]$
C) $[-1; 1]$
D) $\langle -\infty; b \rangle \cup \left[-1; -\frac{1}{b} \right] \cup [1; \infty)$
E) $\langle -\infty; -b \rangle$

82. Al resolver la inecuación:

$$\sqrt{x^2-24x+144} - \sqrt{x^2-12x+36} \geq \sqrt{x^2-6x+9},$$

se obtiene un conjunto solución de la forma: $[a; b]$. Hallar: $a + b$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

83. Resolver:

$$\frac{|x-3| - |4-x|}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}} < \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}}{|x-4| + |3-x|}$$

- A) $x \in [2; 6)$ B) $x \in [2; 3)$ C) $x \in [2; 4)$
D) $x \in [2; 9)$ E) $x \in [2; 7)$

84. Resolver: $\frac{|2x+3| - |x-8|}{|2x-1| - |7x-8|} \geq 0$

- A) $x \in [-11; 1) \cup \left\langle \frac{7}{5}; \frac{7}{3} \right\rangle$
B) $x \in [-11; 0) \cup \left\langle \frac{7}{4}; \frac{5}{2} \right\rangle$
C) $x \in [-11; 1) \cup \left\langle \frac{7}{5}; \frac{5}{2} \right\rangle$
D) $x \in [-11; 0) \cup \left\langle \frac{7}{5}; \frac{5}{3} \right\rangle$
E) $x \in \left[1; \frac{7}{5} \right) \cup \left\langle \frac{5}{3}; +\infty \right\rangle$

85. Considerando que: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son números positivos, tales que:

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1; S = \frac{\sum_{k=1}^n (k + x_k)^2}{n!}; \text{ luego:}$$

- A) $S \geq 4$ B) $S \geq 4^n$ C) $S \geq 4^n - 1$
D) $S \geq n!$ E) $S \geq n^n$

86. Si: $0 < b < a$, además:

$$K = \frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a-b)}$$

luego, podemos afirmar que:

- A) $K \leq -2$ B) $K \geq -1$ C) $K \geq 0$
D) $K \geq \sqrt{8}$ E) $K \geq \sqrt{8} - 1$

87. Si: $x, y \in \mathbb{R}$, hallar el menor valor positivo de:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y - 1}$$

- A) 2 B) -2 C) 3
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

88. Sean: $a, b \in \mathbb{R}^+$, tal que: $a + b = 1$, si:

$$M \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \leq N$$

Calcular el producto entre el máximo M y el mínimo N.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

89. Si: "S" es la suma de "n" cantidades positivas a, b, c, ..., entonces:

$$E = \frac{S}{S-a} + \frac{S}{S-b} + \frac{S}{S-c} + \dots$$

resulta:

- A) $E \geq n^2$ B) $E \geq \frac{n^2}{n-1}$ C) $E \geq \frac{n}{n+1}$
D) $E \geq \frac{n^2}{n+1}$ E) $E \geq n^2 - 1$

90. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto solución de la siguiente inequación?

$$\left(\frac{-3}{2x} \right) \leq 45$$

- A) Infinitos B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

91. Si: $a < b < 0$; resolver:

$$\left(\frac{4b^2 - 3a^2}{b^2 - a^2} \right) x + \frac{4b^2 + a^2}{b^2 + a^2} < \left(\frac{4b^2 + 3a^2}{b^2 + a^2} \right) x + \frac{4b^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

- A) $a < x < b$ B) $x < 0$ C) $x < a$
D) $x > 3$ E) $x < 3$

92. Resolver el sistema:

$$y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0$$

$$y - 2 + |x - 1| < 0$$

Dentro del conjunto de los números enteros, dar como respuesta el valor de:

$$p = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{y_1 + y_2 + \dots + y_n} + n$$

siendo "n" el número de soluciones de dicho sistema.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

93. Un vehículo, marchando a 25 Km/h recorre un camino que mide un número entero en Km. Cuando llevaba recorrida la mitad del camino le faltaban menos de 3h 31min; y cuando llevaba recorridos 60 Km le faltaban más de 4h 35min de marcha. ¿Cuál es la longitud del camino?

A) 130 Km B) 225 Km C) 175 Km
D) 170 Km E) F.D.

94. Resolver: $x - \sqrt{x^2 - ax - 2a^2} > a$; $a < 0$

A) $\{3a; -2a\}$
B) $[-a; \infty)$
C) $\{2a; a\} \cup (-a; \infty)$
D) $\{2a; a\} \cup (-2a; \infty)$
E) $(-\infty; 3a) \cup (-a; \infty)$

95. Resolver:

$$|x - 4| + |2x + 6| > 10$$

Dar como respuesta la suma entre el mayor valor entero negativo y el menor entero positivo x.

A) 5 B) -4 C) 1
D) -2 E) 3

96. Sea el conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{8}} \geq \sqrt[6]{1-x^2} \right\}$$

Entonces, este se define para:

A) $x \leq -1 \vee x \geq 1$ B) $x \in \mathbb{R}$
C) $|x| \leq 1$
D) $|x| \in \mathbb{N}$ E) $x \in \emptyset$

97. Calcular el máximo entero de:

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

A) 1998 B) 1999 C) 2000
D) 2005 E) 2006

98. Dados los números positivos:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Calcular el menor valor de:

$$A = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

A) n B) n + 1 C) n - 1
D) n² E) n² - 1

99. A qué número entero se aproxima:

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}$$

A) 14669 B) 14999 C) 14866
D) 14989 E) 14899

100. Resolver:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x} < \sqrt{x}$$

A) $\left\langle \frac{\sqrt{2}-1}{2}; \infty \right\rangle$

B) $\left\langle \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}; \infty \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2} - 1; \infty \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1}{2}; \infty \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty \right\rangle$

**CLAVES**

1	B
2	D
3	E
4	A
5	C
6	A
7	A
8	E
9	D
10	D
11	C
12	B
13	A
14	D
15	E
16	C
17	C
18	D
19	D
20	A
21	C
22	E
23	D
24	E
25	E

26	E
27	C
28	A
29	E
30	E
31	E
32	E
33	C
34	A
35	D
36	E
37	B
38	B
39	D
40	B
41	B
42	A
43	C
44	B
45	A
46	D
47	C
48	D
49	B
50	A

51	A
52	B
53	A
54	E
55	D
56	E
57	A
58	C
59	D
60	A
61	B
62	D
63	B
64	A
65	D
66	B
67	A
68	C
69	C
70	A
71	D
72	D
73	A
74	B
75	D

76	D
77	E
78	D
79	D
80	D
81	D
82	C
83	C
84	A
85	B
86	E
87	C
88	D
89	B
90	A
91	D
92	D
93	C
94	B
95	B
96	C
97	A
98	C
99	B
100	D

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNIV

UNI - 2009 - I

PROBLEMA 01: Sea la igualdad :

$$|x - a + b| = |x + a - b| \quad \dots (*)$$

entonces la proposición verdadera es:

- A) (*) si y solo si $x = 0 \vee a^2 = b^2$
 B) (*) si y solo si $x = a = b$
 C) (*) si y solo si $x = 0 \wedge a = b$
 D) (*) si y solo si $x = 0 \vee a = b$
 E) (*) si y solo si $x = a = -b$

Resolución:

Por definición se sabe que:

$$|a| = |b|, \text{ si } a = b \vee a = -b$$

En la expresión del enunciado:

$$|x - a + b| = |x + a - b|$$

Aplicando la definición:

$$x - a + b = x + a - b \vee x - a + b = -(x + a - b)$$

$$-2a = -2b \vee x - a + b = -x - a + b$$

$$a = b \vee x = 0$$

Luego, la expresión (*) es verdadera si y solo si

$$x = 0 \vee a = b$$

Rpta.: D**PROBLEMA 02:**Si $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{13}{6}$, $x^2 + y^2 = 5$, $x < 0 < y$ y $|y| < |x|$, hallar el valor de:

$$S = \sqrt{2}y + \sqrt{3}x$$

- A) -2
 B) -1
 C) 0
 D) 1
 E) 2

Resolución:

Del enunciado se tiene las siguientes expresiones:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{13}{6} \quad \dots(I)$$

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \dots(II)$$

$$x < 0 < y \quad \dots(III)$$

$$|y| < |x| \quad \dots(IV)$$

Operando en (IV):

$$|y| < |x| \Rightarrow y < x \vee y < -x$$

Pero considerando (III):

$$y < -x \quad \dots(I)$$

Operando en (I):

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 y^2} = \frac{13}{6}$$

$$6x^4 - 13x^2 y^2 + 6y^4 = 0$$

$$(2x^2 - 3y^2)(3x^2 - 2y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 3y^2 \vee 3x^2 = 2y^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y^2 \quad \dots(2)$$

$$3x^2 = 2y^2 \quad \dots(2^*)$$

Reemplazando (2) en (II):

$$\frac{3}{2}y^2 + y^2 = 5$$

$$\frac{5}{2}y^2 = 5$$

$$\Rightarrow y_1 = \sqrt{2} ; y_2 = -\sqrt{2}$$

Considerando en (III):

$$y = \sqrt{2} \quad \dots(3)$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 09

Reemplazando (3) en (2):

$$x^2 = \frac{3}{2}(\sqrt{2})^2$$

$$x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{3}$$

Considerando (III): $x = -\sqrt{3}$

Verificando la condición (1):

$$\sqrt{2} < -(-\sqrt{3})$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{3} \quad (!\text{Correcto!})$$

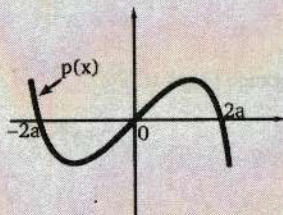
Nota: Al resolver la ecuación (2*) los valores obtenidos de x e y no satisfacen la condición (1), por lo tanto no se obtienen valores válidos.

Finalmente calculamos la expresión:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2}y + \sqrt{3}x \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 03: En la figura se muestra la gráfica del polinomio cúbico $p(x)$.



Sabiendo que $p(a) = 20$, halle $\sqrt{p(-3a)}$

A) 4

B) 5

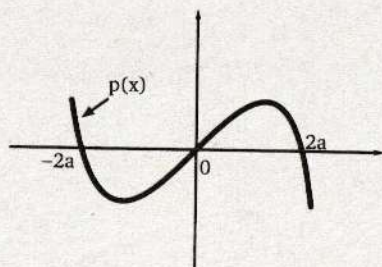
C) 8

D) 10

E) 12

Resolución:

El polinomio cúbico $p(x)$ que se muestra en el gráfico:



Como la curva corta al eje x en tres puntos, es decir, $p(x)$ se hace cero cuando x asume 3 valores, es decir:

$$p(x) = k[x - (-2a)](x - 0)(x - 2a)$$

$$p(x) = k(x + 2a)x(x - 2a) \quad \dots(1)$$

Por dato del problema: $p(a) = 20$, entonces en (1):

$$p(a) = k(a + 2a)(a)(a - 2a)$$

$$20 = k(-3a^3)$$

$$\Rightarrow k = -\frac{20}{3a^3} \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$p(x) = -\frac{20}{3a^3}(x + 2a)(x)(x - 2a)$$

Ahora si $x = -3a$:

$$\Rightarrow p(-3a) = -\frac{20}{3a^3}((-3a + 2a)(-3a)[-3a - 2a])$$

$$p(-3a) = 100$$

Finalmente podemos calcular:

$$\sqrt{p(-3a)} = \sqrt{100} = 10$$

Rpta.: D

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 09

PROBLEMA 04: Si a, b y c son constantes positivas y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0, \text{ Determine el valor de } x.$$

A) $\frac{abc}{a+b+c}$

B) $\frac{abc}{ab+ac+bc}$

C) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$

D) $\frac{a+b+c}{abc}$

E) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$

Resolución:Para determinar el valor de x , en la expresión, donde a, b y c son constantes positivos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Para hallar el valor de x calcularemos el valor de este determinante, aplicando el criterio de la fila 1

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \end{matrix} = 0$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$abc - xbc + (-xac) - xab = 0$$

$$abc - x(bc + ac + ab) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{abc}{ab+ac+bc}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 05: Si el conjunto solución de la inecuación

$$(2^x - x)(3^x - \log_3 x)(x^2 - 9)(3^x - 9) > 0$$

es de la forma $S = \langle a; b \rangle \cup \langle c; +\infty \rangle$, halle $a + b + c$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 5

Resolución:

En la inecuación del enunciado del problema:

$$(2^x - x)(3^x - \log_3 x)(x^2 - 3^2)(3^x - 9) > 0$$

$$(2^x - x)(3^x - \log_3 x)(x + 3)(x - 3)(3^x - 9) > 0 \quad \dots(1)$$

Por la expresión $\log_3 x$ se deduce que:

$$x > 0 \quad \dots(2)$$

Entonces considerando (2) en la expresión (1) se cumple:

$$2^x - x > 0; 3^x - \log_3 x > 0; x + 3 > 0$$

Luego en la expresión (1):

$$\underbrace{(2^x - x)}_{+} \underbrace{(3^x - \log_3 x)}_{+} \underbrace{(x + 3)}_{+} (x - 3)(3^x - 3^2) > 0$$

Entonces podemos sintetizar así:

$$(x - 3)(3^x - 3^2) > 0$$

Resolviendo esta inecuación de dos factores:

$$\text{Solución el caso 1: } x - 3 > 0 \wedge 3^x - 3^2 > 0$$

$$x > 3 \wedge 3^x > 3^2$$

$$\Rightarrow x > 3$$

$$\Rightarrow S_1 = \langle 3; \infty \rangle$$

$$\text{Solución del caso 2: } x - 3 < 0 \wedge 3^x - 3^2 < 0$$

$$x < 3 \wedge 3^x < 3^2$$

$$\Rightarrow x < 2$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 09

Considerado el caso 2:

$$\Rightarrow S_2 = \langle 0; 2 \rangle$$

Considerando los dos casos:

$$S = \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$$

Comparando con la expresión que se da en el enunciado del problema.

$$s = \langle a, b \rangle \cup \langle c; +\infty \rangle$$

$$a = 0; b = 2; c = 3$$

Finalmente hallamos el valor de la expresión:

$$a + b + c = 0 + 2 + 3 = 5$$

Rpta.: E

PROBLEMA 06: Dada la sucesión 2, 6, 12, 20, 30, 42,
Determine la suma de los 100 primeros términos de la sucesión anterior.

A) 10100

B) 294880

C) 323400

D) 333300

E) 343400

Resolución:

La sucesión dada:

$$2; 6; 12; 20; 30; 42; \dots$$

También puede expresarse así:

$$1 \cdot 2; 2 \cdot 3; 3 \cdot 4; 4 \cdot 5; 5 \cdot 6; 6 \cdot 7; \dots$$

La suma de los términos de esta sucesión:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1)$$

Expresada en forma de sumatorias:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + k$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \quad \dots(1)$$

Pero por teoría se sabe que:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \dots(2)$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots(3)$$

Luego reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+4) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+4) \end{aligned}$$

Para sumar los 100 primeros términos:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} (100)(100+1)(100+4) = 343400$$

Rpta.: E

PROBLEMA 07: El sistema de inecuaciones

$$x - 3y \leq 6$$

$$2x + y \geq 4$$

$$x + y \leq 6$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

determina en el plano una región R. Podemos afirmar que

- A) R es una región triangular
- B) R es una región cuyo borde es un cuadrado
- C) R es una región cuyo borde es un cuadrilátero
- D) R es vacía
- E) R es un cuadrante

Resolución:

El sistema de ecuaciones :

$$x - 3y \leq 6 ; L_1 : x - 3y = 6$$

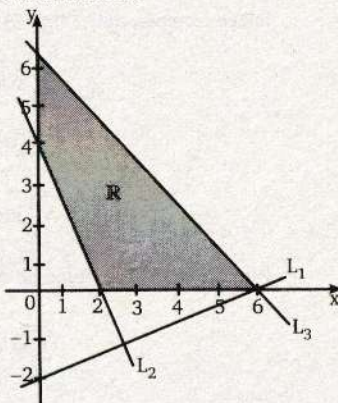
$$2x + y \geq 4 ; L_2 : 2x + y = 4$$

$$x + y \leq 6 ; L_3 : x + y = 6$$

$$x \geq 0 ; L_4 : x = 0 ; (y)$$

$$y \geq 0 ; L_5 : y = 0 ; (x)$$

En el sistema de coordenadas cartesianas:



Se observa que R es una región cuyo borde es un cuadrilátero.

Rpta.: C**PROBLEMA 08:**

Sea u el número de decenas de sillas y v el número de decenas de mesas que fabrica una empresa al día. Si la utilidad diaria está dada por $200u + 300v$, y se tienen las siguientes restricciones:

$$u + v \leq 4$$

$$2u + 3v \leq 10$$

$$40u + 20v \leq 120$$

Encuentre el número de decenas de mesas y sillas, respectivamente, a fabricar diariamente de modo que la empresa obtenga la mayor utilidad.

A) 3 y 1

B) 1 y 3

C) 2 y 2

D) 2 y 3

E) 3 y 2

Resolución:

Del enunciado del problema, la producción diaria de:

Número de decenas de sillas : u

Número de decenas de mesas: v

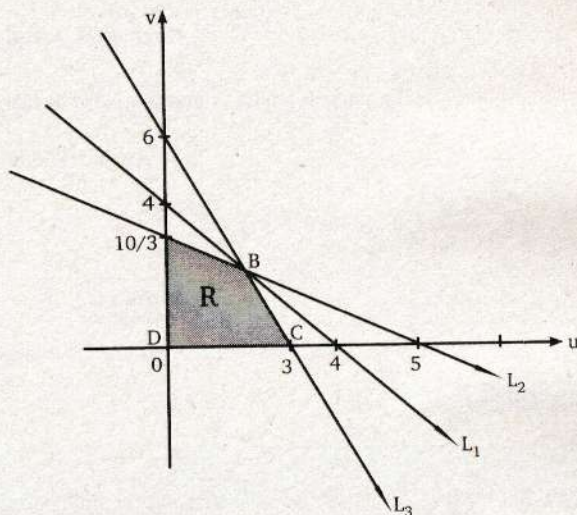
Se tiene las siguientes restricciones:

$$u + v \leq 4 \quad \Rightarrow \quad L_1 : v = -u + 4$$

$$2u + 3v \leq 10 \quad \Rightarrow \quad L_2 : v = -\frac{2}{3}u + \frac{10}{3}$$

$$40u + 20v \leq 120 \quad \Rightarrow \quad L_3 : v = -2u + 6$$

En el gráfico "v versus u":



Para hallar el punto B: $L_2 \cap L_3$

$$-\frac{2}{3}u + \frac{10}{3} = -2u + 6$$

$$\frac{4}{3}u = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow u = 2$$

Luego L_3 :

$$v = -2(2) + 6$$

$$\Rightarrow v = 2$$

Por teoría se sabe que los valores mínimos y máximos de una función $F(u; v)$ se ubican en los vértices.

del enunciado, la utilidad diaria esta dada por :

Analizando en cada vértice:

$$\text{En el vértice A : } U\left(0; \frac{10}{3}\right) = 200(0) + 300\left(\frac{10}{3}\right) = 1000$$

$$\text{En el vértice B : } U(2; 2) = 200(2) + 300(2) = 1000$$

$$\text{En el vértice C : } U(3; 0) = 200(3) + 300(0) = 600$$

$$\text{En el vértice D : } U(0; 0) = 200(0) + 300(0) = 0$$

La empresa tendrá la mayor utilidad de fabrica si:

$$u = 0 \text{ y } v = \frac{10}{3};$$

o también si $u = 2$ y $v = 2$

Rpta.: C

UNI - 2009 - II

PROBLEMA 09: La suma de las soluciones positivas de la ecuación $\frac{10}{1+x+x^2} = 6-x-x^2$ es

A) $\frac{-2-\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$

B) $\frac{-2+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$

C) $\frac{2+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$

D) $\frac{-3+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$

E) $\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$

Resolución:

* Toda ecuación de cuarto grado tiene 4 raíces.

En la ecuación:

$$\frac{10}{1+x+x^2} = 6-x-x^2 \quad \dots(1)$$

si hacemos

$$1+x+x^2 = m \quad \dots(2)$$

Entonces en la expresión de ecuación (1):

$$6 - x - x^2 = 7 - (1 + x + x^2) \quad \dots(3)$$

De (2):

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\frac{10}{m} = 7 - m$$

$$m^2 - 7m + 10 = 0$$

$$(m - 2)(m - 5) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2 ; m = 5$$

Reemplazando $m = 2$ en (2):

$$1 + x + x^2 = 2$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \dots(4)$$

Reemplazando $m = 5$ en (2):

$$1 + x + x^2 = 5$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \dots(5)$$

El conjunto de soluciones o raíces de la ecuación:

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

la suma de todas las soluciones positivas:

$$S_p = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{5} + \sqrt{17}}{2}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 10: Sea f una función tal que $f(x - 2\sqrt{x}) = 2(x - 4\sqrt{x})$, $x \geq 4$, entonces $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$ es igual a:

A) $[0; \infty)$

B) $[1; \infty)$

C) $\{0; \infty\}$

D) $[4; \infty)$

E) $\{1; \infty\}$

Resolución:

Operando en la expresión:

$$f(x - 2\sqrt{x}) = 2(x - 4\sqrt{x}); x \geq 4$$

Completando cuadrado lo definimos:

$$f((\sqrt{x} - 1)^2 - 1) = 2((\sqrt{x} - 2)^2 - 4) \quad \dots(1)$$

Si hacemos

$$(\sqrt{x} - 1)^2 - 1 = t \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = t + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{t + 1} + 1 \quad \dots(3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$f(t) = 2\left[\left(\sqrt{t + 1} + 1 - 2\right)^2 - 4\right]$$

$$f(t) = 2(\sqrt{t + 1} - 1)^2 - 8 \quad \dots(4)$$

Por condición del problema se tiene que $x \geq 4$, entonces en (2) se deduce que:

$$\text{Si } x \geq 4 \Rightarrow (\sqrt{4} - 1)^2 - 1 = t \Rightarrow t \geq 0; \text{ luego:}$$

$$\text{Dom}(f) = [0; \infty) \quad \dots(5)$$

Para hallar el rango de la función f debemos obtener la expresión (4) partiendo de su dominio, es decir de la expresión (5).

$$t \geq 0$$

$$t + 1 \geq 1$$

$$\sqrt{t + 1} \geq 1$$

$$\sqrt{t+1} - 1 \geq 1 - 1$$

$$(\sqrt{t+1} - 1)^2 \geq 0$$

$$2(\sqrt{t+1} - 1)^2 \geq 0$$

$$2(\sqrt{t+1} - 1)^2 - 8 \geq -8$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f) = [-8; \infty) \quad \dots(5)$$

Finalmente obtenemos de (4) y (5):

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f) = [0; \infty) \cap [-8; \infty) = [0; \infty)$$

Rpta.: A

PROBLEMA 11:

Sea $P(x) = x^3 - 3ax^2 - a^2x + 3a^3$, donde $a > 0$ y $Q(x) = -P(x-a)$. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- A) $Q(x) \geq P(x), \forall x < 0$
- B) $Q(x) \geq P(x), \forall x \in (0; a)$
- C) $P(x) \geq Q(x), \forall x \in (a; 2a)$
- D) $Q(x) \geq P(x), \forall x \in (2a; 3a)$
- E) $P(x) \geq Q(x), \forall x > 3a$

Resolución:

Sea el polinomio de grado n :

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

Si lo factorizamos en la forma:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

Igualando a cero a esta expresión podemos obtener raíces. Las raíces reales representa los puntos donde la curva del polinomio corta el eje x .

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = 0$$

$\Rightarrow r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son raíces del polinomio

En el problema : $a > 0$

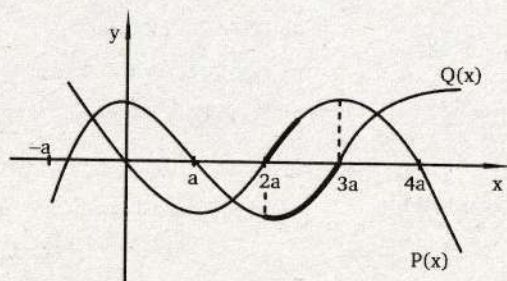
- El polinomio $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3ax^2 - a^2x + 3a^3 \\ &= x^3 - 3a(x^2 - a^2) - a^2x \\ &= x(x^2 - a^2) - 3a(x^2 - a^2) \\ &= (x^2 - a^2)(x - 3a) \\ &= (x + a)(x - a)(x - 3a) \quad \dots(1) \end{aligned}$$

- El polinomio $Q(x)$, según el enunciado.

$$\begin{aligned} Q(x) &= -P(x - a) \\ &= ((x - a) - 3a)((x - a) - a)((x - a) + a) \\ &= -(x - 4a)(x - 2a)(x) \quad \dots(2) \end{aligned}$$

De (1) y (2) graficamos los polinomios.



Se observa que en el intervalo $\langle 2a; 3a \rangle$

$$Q(x) \geq P(x)$$

Rpta.: D

PROBLEMA 12: Al resolver el sistema :

$$\begin{cases} xz = 6 \\ (x + y)^x = 1000 \\ (x + y)^z = 100 \end{cases}$$

El valor para y es:

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución:

Asignamos un número a cada ecuación:

$$\begin{cases} xz = 6 & \dots(1) \\ (x + y)^x = 1000 & \dots(2) \\ (x + y)^z = 100 & \dots(3) \end{cases}$$

Operando en ecuación (1):

$$z = 6 / x \quad \dots(4)$$

Operando en la ecuación (3):

$$x + y = 100^{1/z} \quad \dots(5)$$

Reemplazando (5) en (2):

$$\begin{aligned} (100^{1/z})^x &= 1000 \\ 100^{x/z} &= 1000 \\ 10^{2x/z} &= 10^3 \\ \Rightarrow \frac{2x}{3} &= 3z \\ 2x &= 3z \end{aligned}$$

De (4):

$$2x = 3 \left(\frac{6}{x} \right)$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Reemplazando el valor de $x = 3$ en (2):

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= 10^3 \\ \Rightarrow 3 + y &= 10 \Rightarrow y = 7 \end{aligned}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 13:

En el antiguo texto, se encuentra la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$, y del producto

$A^2 A^T$ la última columna, la cual es $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Halle la matriz A .

A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Resolución:

Se tiene la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \quad \dots(1)$$

Y la última columna de la matriz $A^2 A^T$:

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \dots(2)$$

Operando con la matriz A :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & xy \\ 0 & 0 & yz \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \end{bmatrix}$$

El producto:

$$A^2 A^T = \begin{bmatrix} 1 & x & xy \\ 0 & 0 & yz \\ 0 & 0 & z^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & xyz \\ \dots & \dots & yz^2 \\ \dots & \dots & z^3 \end{bmatrix} \quad \dots(3)$$

Igualando los elementos de las ultimas columnas de las matrices (3) y (2) se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} xyz = -6 & \dots(I) \\ yz^2 = 2 & \dots(II) \\ z^3 = -1 & \dots(III) \end{cases}$$

De (III): $z = -1$...(4)

Reemplazando (4) en (II):

$$y(-1)^2 = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \dots(5)$$

Reemplazando (5) en (I):

$$x(2)(-1) = -6 \Rightarrow x = 3$$

Luego la matriz queda determinada así:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 14:

Dada la serie $\sum_{k=0}^n x^k$, cuyas sumas parciales son dadas por $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$. Indi-

que la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $S_n(1)$ diverge cuando n tiende a ∞

II. $S_n\left(\frac{1}{2}\right)$ converge a 2 cuando n tiende a ∞

III. $S_n\left(\frac{1}{100}\right)$ converge a 0 cuando n tiende a ∞

A) VVF

B) FVF

C) FFF

D) FVV

E) FFV

Resolución:

La serie geométrica:

$$\sum_{k=0}^n aq^k = a \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right) \quad \dots(1)$$

a: primer término

En el problema, la serie se define por:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k \quad \dots(1)$$

En las proposiciones:

I. VERDADERA (V)

Sustentación:

Aplicando (1) cuando $x = 1$:

$$S_n(1) = \sum_{k=0}^n (1)^k = 1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = n$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \rightarrow \infty \text{ (diverge)}$$

II. VERDADERA(V)

Sustentación:

Aplicando (1) cuando $x = 1/2$:

$$S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{De (I):} \quad = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2$$

III. FALSA(F)

Sustentación (1) cuando $x = \frac{1}{100}$:

$$S_n \left(\frac{1}{100} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{100} \right)^k = \left(\frac{1}{100} \right)^0 + \left(\frac{1}{100} \right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{100} \right)^n$$

$$\text{De(I):} \quad = \frac{100}{99} - \left(\frac{1}{99} \right) \left(\frac{1}{100} \right)^n$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(\frac{1}{100} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{100}{99} - \left(\frac{1}{99} \right) \left(\frac{1}{100} \right)^n \right] = \frac{100}{99}$$

La secuencia correcta de las proposiciones es VVF.

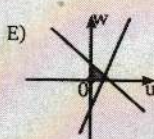
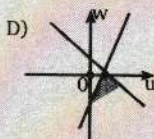
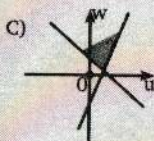
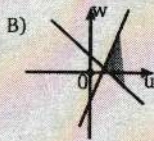
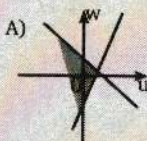
Rpta.: A

PROBLEMA 15: $(x_0; y_0)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} 4e^{2x}e^y + e^xe^{-y} = 5e \\ e^{2x}e^y + e^xe^{-y} = 2e \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes regiones sombreadas corresponde al conjunto solución del sistema?

$$\begin{cases} 6x_0u + 3y_0w \leq 1 \\ -3x_0u + 9y_0w \geq -2 \end{cases}$$



Resolución:

En el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4e^{2x}e^y + e^xe^{-y} = 5e & \dots(1) \\ e^{2x}e^y + e^xe^{-y} = 2e & \dots(2) \end{cases}$$

Procedemos a resolver el sistema:

$$(1) \times 2: 8e^{2x}e^y + 2e^xe^{-y} = 10e \quad \dots(1^*)$$

$$(2) \times 5: 5e^{2x}e^y + 5e^xe^{-y} = 10e \quad \dots(2^*)$$

Igualando (1*) y (2*):

$$8e^{2x}e^y + 2e^xe^{-y} = 5e^{2x}e^y + 5e^xe^{-y}$$

$$3e^{2xy}e = 3e^xe^{-y}$$

$$e^x = e^{-2y}$$

$$\Rightarrow x = -2y \quad \dots(3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$e^{2(-2y)}e^y + e^{-2y}e^{-y} = 2e$$

$$e^{-3y} + e^{-3y} = 2e$$

$$e^{-3y} = e$$

$$\Rightarrow -3y = 1$$

$$y = -\frac{1}{3} \quad \dots(4)$$

Reemplazando (4) en (3):

$$x = -2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Como $(x_0; y_0)$ es solución del sistema, condición del problema, entonces se cumple:

$$(x_0; y_0) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \quad \dots(5)$$

En el sistema dado en el enunciado del problema:

$$\begin{cases} 6x_0u + 3y_0w \leq 1 \\ -3x_0u + 9y_0w \geq -2 \end{cases}$$

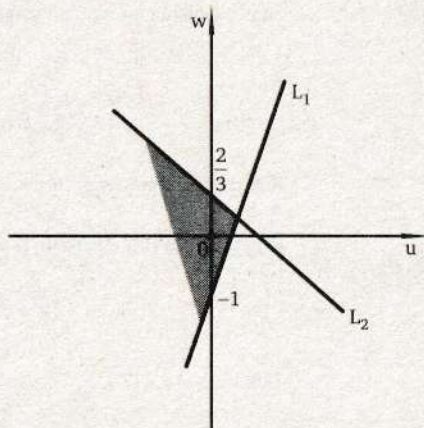
Reemplazando sus respectivos valores de (5):

$$\begin{cases} 6\left(\frac{2}{3}\right)u + 3\left(-\frac{1}{3}\right)w \leq 1 \\ -3\left(\frac{2}{3}\right)u + 9\left(-\frac{1}{3}\right)w \geq -2 \end{cases}$$

Redu ciendo:

$$\begin{cases} 4u - w \leq 1 \Rightarrow L_1 : w = 4u - 1 \\ -2u - 3w \geq -2 \Rightarrow L_2 : w = -\frac{2}{3}u + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Graficando:



Rpta.: A

PROBLEMA 16: La raíz cúbica del número complejo $z = -2$ de mayor argumento principal, es también raíz 18-ésima de otro complejo $u = a + bi$ con a y b números reales. Determine $a + b$.

A) $2^5(\sqrt{3} + 1)$

B) 2^6

C) $2^7(\sqrt{3} + 1)$

D) 2^8

E) 2^9

Resolución:

Un número complejo se puede representar como:

$$Z = a + bi \quad \dots(I)$$

$$Z = |Z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \theta \in \mathbb{R} \quad \dots(II)$$

$$Z = |Z|e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \quad \dots(III)$$

Donde: θ es el argumento de Z y $e = 2,718\dots$

La raíz de un número complejo:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{|Z|} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad \dots(IV)$$

Donde: $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$

En el problema, el número complejo está definido:

$$Z = -2$$

De (II):

$$Z = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$

Entonces el argumento $\theta = \pi$

Para hallar la raíz cúbica de Z aplicamos (I)

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \right]$$

Donde: $k = 0, 1, 2$

Cuando $k = 2$ se tiene la raíz cúbica con el mayor argumento, entonces:

$$\sqrt[3]{Z_2} = \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{2(2)\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 2(2)\pi}{3} \right) \right]$$

$$\sqrt[3]{Z_2} = \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right]$$

De (III) :

$$\sqrt[3]{Z_2} = \sqrt[3]{2} e^{i5\pi/3}$$

Del enunciado: "la raíz cubica de mayor argumento, es también raíz

18-ésima de otro número complejo $u = a + ib$ ", es decir :

$$\sqrt[18]{u} = \sqrt[3]{Z}$$

$$\sqrt[18]{a + bi} = \sqrt[3]{2} e^{i5\pi/3}$$

$$a + bi = (\sqrt[3]{2} e^{i5\pi/3})^{18}$$

$$a + bi = 2^6 e^{i30\pi}$$

$$a + bi = 2^6 \left(\underbrace{\cos 30\pi}_1 + \underbrace{\operatorname{sen} 30\pi}_0 \right)$$

$$a + bi = 2^6$$

Para que se cumpla esta última igualdad

$$a + bi = 2^6 \Rightarrow a = 2^6 \wedge b = 0$$

Finalmente calculamos:

$$a + b = 2^6 + 0 = 2^6$$

Rpta.: B

- | | |
|----|--|
| 2 | El polinomio - Productos Notables |
| 3 | División Algebraica - Divisibilidad algebraica |
| 4 | Factorización - Fracciones |
| 5 | Radicación - Racionalización |
| 6 | Potencia de un Binomio - Factorial de un Número - Combinatoria |
| 7 | Números Complejos |
| 8 | Ecuaciones |
| 9 | Desigualdades - Inecuaciones |
| 10 | Relaciones - Funciones |
| 11 | Función Exponencial - Logaritmos |
| 12 | Sucesiones y Series |
| 13 | Matrices - Determinantes |
| 14 | Sistema de Ecuaciones |
| 15 | Programación Lineal - Gráfica de Relaciones |
| 16 | Límites y Derivadas |

Teléfonos: 424 - 6350



/ Editorial RODO - Oficial

992 - 796104



editorialrodo@gmail.com

Aritmética (15 folletos)
 Algebra (15 folletos)
 Geometría (14 folletos)
 Trigonometría (17 folletos)
 Raz. Matemático (18 folletos)
 Física (16 folletos)
 Química (16 folletos)



- ✓ 140 páginas
- ✓ Marco teórico completo.
- ✓ 100 problemas resueltos
- ✓ 100 problemas propuestos con claves.
- ✓ Básico - Intermedio - Avanzado
- ✓ Exámenes de admisión resueltos.

* **Datos Referenciales**

N°

1

TEMAS

Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales